А. В. СПИВАК

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

6–7 классы

«Посев», 2003 г.

УДК 51(023)
С72
ББК 22.1

Александр Васильевич Спивак
Математический кружок. 6–7 классы.
М.: Посев, 2003, — 128 с.

В книге широко представлены задачи по математике, предлагавшиеся школьникам 6–7 классов на занятиях математических кружков и олимпиадах. Основное её содержание — классические арифметические задачи. Кроме них, есть геометрические задачи, требующие фантазии и изобретательности, и просто шутки.

Книга предназначена для учащихся 6–7 классов, но будет интересна и полезна как более старшим, так и более младшим школьникам, а также учителям и родителям.

Предисловие

Первое открытие всегда заключается в том,
что есть вещи, которые стоит открывать.
Д. Томсон «Дух науки»

Математика — один из главных школьных предметов. Но спросите родителей и учеников, что они бы сразу сделали, если бы могли, и от большинства услышите: "Надо уменьшить нагрузку, в нашей семье гуманитарный склад ума, а математика — и недоступна, и никому не нужна."

Плоха не математика, а бессмысленная зубрёжка. Цель обучения — не заучивание невесть откуда взятых правил, а развитие интеллекта. На уроке математики всё должно быть ясно. Если есть какое-то непонимание — значит, нет никакого понимания. Миф о людях с нематематическим, гуманитарным складом ума придуман в оправдание тем, кто пропустил какое-то важное место (например, не понял, что такое процент или дробь) и все оставшиеся школьные годы сидит на уроках, не понимая, что там творят.

Нормальный здоровый ребёнок может невероятно много.[*)] Всякому хочется радости творчества, самостоятельных (желательно — поддержанных родителями и учителями) размышлений. Эта книжка как раз даёт возможность думать. Бóльшая часть её задач требует не долгих вычислений, а ясного взгляда, сосредоточенности. Но учтите — есть и очень трудные задачи. Иной раз потребуются длительные напряжённые размышления для того, чтобы найти решение «в одну строчку».

Вряд ли необходимо решать абсолютно все задачи подряд: напротив, некоторые трудные задачи лучше пропустить при первом чтении, чтобы поразмышлять над ними на досуге и вернуться к ним спустя несколько недель или месяцев.

[*)] И быстро теряет изначальную гениальность, если взрослые, ленясь, не ценят и не развивают его ум, не желают или не умеют заставить его учиться.

Как решать задачи?

Книги, трактующие об искусстве рассуждать, полезны лишь тем, кто может обойтись без них.
Д'Аламбер

В решении любой задачи есть крупица открытия. Задача может быть сколь угодно скромной, но если она заставила быть изобретательным и если Вы решили её самостоятельно, то радость победы — пусть даже о ней никто, кроме Вас, не узнает,— должна быть ОГРОМНОЙ. Вспомните выскочившего из ванны Архимеда!

Если же задача не получилась и пришлось читать чужое решение[*)], обязательно возникнет вопрос: "Как можно было до этого догадаться?"

Ответ прост — нельзя научиться плавать, не войдя в воду. И, честно говоря, пишу я всё это не для того, чтобы дать волшебный ключик[†)]. Просто какие-то задачи могли не получиться и могла возникнуть «идея»: "Не бросить ли эту противную[‡)] книгу и не взять ли что-нибудь попроще? А может быть, я — самый глупый человек в мире, и именно я никогда не смогу научиться их решать?"

Нет, учиться надо не тому, что легко получается. Ценно высшее напряжение сил. Урок математики должен быть чем-то вроде «операции на мозге», создающей «новые извилины».

[*)] Без этого не обойтись. Математика развивается уже несколько тысячелетий — даже если Вы столь же талантливы и упорны, как великие предшественники, жизнь слишком коротка. Спасает нас только то, что, как сказал великий математик и физик Исаак Ньютон, мы стоим на плечах гигантов, можем использовать их достижения.

[†)] Да и нет никакого волшебного ключика, никаких сверхъестественных «математических способностей», никаких сверхбыстрых методик, позволяющих без труда овладеть наукой!

[‡)] Поскольку многим людям свойственно винить других в своих ошибках и искать ложные обходные пути вместо того, чтобы мужественно идти по прямой к цели.

Может быть, Вас утешат и придадут силы мысли мудрецов?

- Способность к восприятию математики распространена в человечестве, пожалуй, даже в бо́льшей степени, чем способность получать удовольствие от приятной мелодии, она присуща огромному большинству. Г. Харди
- Умение решать задачи — такое же практическое искусство, как умение плавать или бегать. Ему можно научиться только путём подражания или упражнения. Д. Пойа
- … если подробности целой тысячи дел Вы знаете как свои пять пальцев, странно было бы не разгадать тысячу первое. Шерлок Холмс
- Искусство делать выводы и анализировать, как и все другие искусства, постигается долгим и прилежным трудом, и поэтому ни один смертный не может достичь полного совершенства в этой области. Шерлок Холмс
- Если бы мне пришлось начать вновь своё обучение, то я последовал бы совету Платона и принялся бы сперва за математику, как науку, требующую точности и принимающую за верное только то, что вытекает как следствие из доказанного. Галилео Галилей
- Десять страниц математики понятой лучше ста страниц, заученных на память и непонятых, а одна страница, самостоятельно проработанная, лучше десяти страниц, понятых отчётливо, но пассивно. Д. Юнг
- Экспериментатор подвесил в комнате бананы, желая узнать, догадается ли шимпанзе составить из разбросанных как попало ящиков пирамиду и достать бананы, взобравшись на неё. Обезьяна тихо сидела в углу, наблюдая, как он расставляет ящики. Она терпеливо ждала, пока экспериментатор не оказался под бананами, внезапно вспрыгнула ему на плечи и схватила бананы.
- Эйнштейну понадобилась скрепка. Порывшись, он нашёл совершенно искорёженную скрепку. Пришлось искать, чем бы

её выпрямить. Новые поиски дали целую коробку прекрасных скрепок. Эйнштейн сразу же взял одну и принялся изготовлять приспособление для починки скрепки-уродца. На возглас ассистента *«Что Вы делаете?»* Эйнштейн. замешкавшись, ответил: «Видите, ... когда я ставлю перед собой цель, отвлечь меня от неё почти невозможно.»

- Математические сведения могут применяться умело и с пользой только в том случае, если они усвоены творчески, так, что учащийся видит сам, как можно было прийти к ним самостоятельно. А. Н. Колмогоров
- Рассказывают про какого-то философа, что он, имея двух учеников — одного неспособного, а другого шаловливого,— прогнал обоих, так как один, желая учиться, не мог, а другой, имея способности, не желал.
- Мозг, хорошо устроенный, стоит больше, чем мозг, хорошо наполненный. Монтень

Обозначения и советы читателю

Номера задач, к которым в конце книги есть ответ, указание или решение, выделены курсивом. Некоторые задачи имеют один и тот же номер (например, задачи 81 и 81$'$.) Так сделано, когда по сути это — варианты одной и той же задачи. Звёздочкой помечены задачи, которые кажутся мне более трудными. (Впрочем, у каждого человека свои понятия о том, что трудно, а что легко.)

Не вошедшие в эту книгу решения и указания, а также иллюстрации, комментарии и много других разных интересных задач можно найти на сайте МММФ по адресу

http://mmmf.math.msu.su

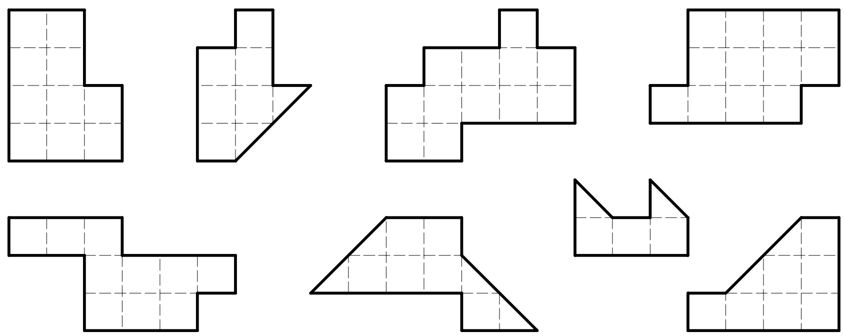
Материалы журнала «Квант» можно найти на сайте

http://kvant.mccme.ru

Знакомство

Тот, кто не знает математики, не может
узнать никакой другой науки и даже не может
обнаружить своего невежества, а потому
не ищет от него лекарства.
Роджер Бэкон, 1267 г.

1. Разрежьте каждую из фигур на две одинаковые и по площади, и по форме части.



2. Почему водопроводные и канализационные люки круглые, а не квадратные?

3. Можно ли прорезать в тетрадном листе бумаги дыру, в которую пролезет взрослый человек?

4. а) Положите на стол 3 спички, чтобы головки не касались стола.*)
   б) Разрежьте треугольник на 4 треугольника, каждый из которых имеет общий отрезок границы с каждым из трёх других.
   в) Разрежьте квадрат на 5 прямоугольников, никакие два из которых не имеют общей стороны.†)

---

*)Ставить спички «шалашиком» или пользоваться стенами, стульями и тому подобным запрещено. Нельзя использовать и край стола, свешивая с него головки спичек.

†)Сторона одного прямоугольника может быть частью стороны другого; нельзя лишь допустить *точного* совпадения сторон.

5. После 7 стирок длина, ширина и высота куска мыла уменьшились вдвое. На сколько стирок хватит оставшегося куска?

6. Предложил чёрт лодырю: “Всякий раз, как перейдёшь этот волшебный мост, твои деньги удвоятся. За это ты, перейдя мост, должен будешь отдать мне 24 копейки.” Трижды перешёл лодырь мост — и остался совсем без денег. (То есть отдал в третий раз чёрту точно те 24 копейки, что оказались у него к этому моменту.) Сколько денег было у него первоначально?

7. Над озёрами летели гуси. На каждом садилась половина гусей и ещё полгуся, остальные летели дальше. Все сели на 7 озёрах. Сколько было гусей?

8. Можно ли отмерить 8 литров воды, находясь у ручья и имея два ведра вместимостью 15 литров и 16 литров соответственно?

9. Купец на 540 рублей купил 138 аршин сукна (чёрного и синего). Сколько купил он чёрного сукна и сколько синего, если синее стоило 5 рублей за аршин, а чёрное — 3 рубля за аршин?

10. Задержанный признался, что у него три сына, произведение их возрастов равно 36, а сумма равна числу окон дома, около которого произошло задержание. Милиционер сказал, что для определения возраста детей этого недостаточно. Когда задержанный добавил, что его старший сын рыжий, милиционер определил возрасты детей. Сколько им было лет?

11. В кружке, где занимается Миша, более 93% участников — девочки. Чему равно наименьшее возможное число участников?

12. У Ивана было 3 лепёшки, а у Петра — 4. Прохожий присоединился к их трапезе, заплатив 7 копеек. Все ели поровну. Как следует распределить деньги между Петром и Иваном?

13. Вот семь венгерских существительных: **nyírfa, körte, alma, almak, körtefa, nyírfak, almafa.** А вот их переводы на русский язык: **берёза, груша, яблоня, яблоко, берёзы, яблоки.** (Заметьте: этими шестью русскими словами переведены все семь венгерских!) Установите, какое венгерское слово какому русскому соответствует.

Чем отличается овца от курицы?

Да, что знаешь в детстве —
знаешь на всю жизнь, но и:
чего не знаешь в детстве
— не знаешь на всю жизнь.
М. Цветаева

14. На двух полках 25 книг. На одной из них на 3 книги больше, чем на другой. Сколько книг на каждой полке?

15. У Маши, Саши и Даши вместе 11 воздушных шариков. У Маши на 2 шарика меньше, чем у Даши, а у Саши на 1 шарик больше, чем у Даши. Сколько шариков у Даши?

16. Сестёр у Вити на две больше, чем братьев. На сколько в этой семье девочек больше, чем мальчиков?

17. У мальчика столько же сестёр, сколько и братьев, а у его сестры вдвое меньше сестёр, чем братьев. Сколько в этой семье мальчиков и сколько девочек?

18. У овец и кур вместе 36 голов и 100 ног. Сколько овец?

19. Вовочка собрал в коробку жуков и пауков — всего 8 штук. Если всего в коробке 54 ноги, сколько там пауков? (У жука 6 ног, у паука — 8.)

20. На поляне ребята пасут жеребят. Если пересчитать ноги ребят и жеребят, то будет 74, а если считать головы, то 22. Сколько на лугу жеребят?

21*. Один человек купил 112 баранов старых и молодых, заплатив за них 49 рублей и 20 алтын. За каждого старого барана он платил 15 алтын и 4 полушки, а за молодого — 10 алтын. Сколько каких баранов было куплено? (В одном алтыне 3 копейки, а в одной копейке — 4 полушки.)

---

22. Расставьте числа 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 в таком порядке, чтобы между единицами оказалась одна цифра, между двойками — две, между тройками — три, а между четвёрками — четыре цифры.

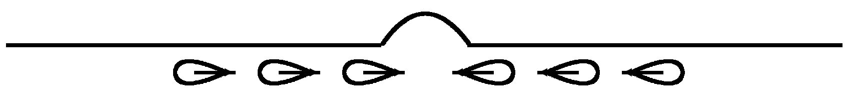
Переправы

Обычный метод преодоления трудности состоит в том, чтобы обойти её.

23. Двое мальчиков катались на лодке. К берегу подошёл отряд солдат. Лодка так мала, что на ней могли переправиться двое мальчиков или только один солдат. Смогли ли солдаты переправиться через реку?

24. Может ли крестьянин перевезти через реку волка, козу и капусту, если в лодку вместе с ним помещается только или волк, или коза, или капуста? (Нельзя оставить без присмотра ни волка с козой, ни козу с капустой.)

25. По длинному узкому каналу один за другим идут три парохода. Навстречу им — ещё три парохода. Канал такой узкий, что два парохода в нём разъехаться не могут, но в нём есть залив, где может поместиться один пароход. Могут ли они разъехаться?



26. Семья ночью подошла к мосту. Папа может перейти его за 1 минуту, мама — за 2, малыш — за 5, а бабушка — за 10 минут. У них есть один фонарик. Мост выдерживает только двоих. Как им перейти мост за 17 минут?
(Если переходят двое, то они идут с меньшей из их скоростей. Двигаться по мосту без фонарика нельзя. Светить издали нельзя. Носить друг друга на руках нельзя. Кидаться фонариком нельзя.)

27. Барон Мюнхгаузен и его слуга Томас подошли к реке. На берегу они обнаружили лодку, способную перевезти лишь одного человека. Тем не менее они переправились через реку и продолжили путешествие. Могло ли так быть?

28*. Могут ли три рыцаря, каждый со своим оруженосцем, переправиться через реку на двухместной лодке, если оруженосцы отказываются оставаться с незнакомыми рыцарями без своих хозяев?

Указание. Чтобы не запутаться, обозначьте рыцарей буквами A, B, C, а оруженосцев — соответственно, a, b, c. Проведите чёрточки, которые будут обозначать реку. Не ленитесь явно выписывать все передвижения лодки, каждый раз отмечая, кто на каком берегу. (На рисунке — одно из решений. Часть строк, чтобы не было скучно, пропущена.)

$ABCabc$ л	‖		
$ABCa$	‖	л	bc
$ABCab$ л	‖		c
ABC	‖	л	abc
...	‖		...
...	‖		...
...	‖		...
	‖	л	$ABCabc$

29*. В лодке, вмещающей только двух человек, через реку должны переправиться три миссионера[*] и три каннибала[†]. Миссионеры боятся остаться на каком-нибудь берегу реки в меньшинстве. Только один миссионер и один каннибал умеют грести. Помогите им переправиться.

---

30. Если бы школьник купил 11 тетрадей, то у него осталось бы 5 копеек. А на 15 тетрадей у него не хватило 7 копеек. Сколько денег было у школьника?

Наводящий вопрос. Сколько стоят $15 - 11 = 4$ тетради?

31. Десятерым животным — собакам и кошкам — скормили 56 галет. Каждой собаке досталось 6 галет, каждой кошке — 5. Сколько было собак и сколько кошек?

32. В двух пачках всего 30 тетрадей. Когда из первой пачки переложили во вторую 2 тетради, в первой стало вдвое меньше тетрадей, чем во второй. Сколько тетрадей было в каждой пачке?

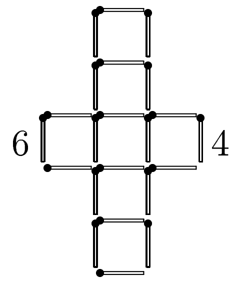
[*] Слово «миссионер» произошло из французского missionnaire, возможно, через посредство немецкого Missionär. Означает — проповедник, посланец.

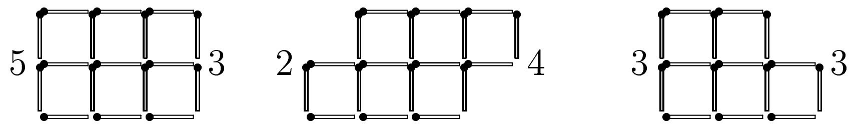
[†] Каннибал — людоед.

Перекладывания спичек

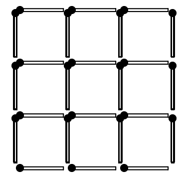
Делая что-нибудь бесполезное,
ограничивайтесь лишь
самым необходимым.
Шамфор

33. Уберите указанное слева от каждого из рисунков число спичек, чтобы осталось указанное справа число квадратов со стороной в одну спичку.*)

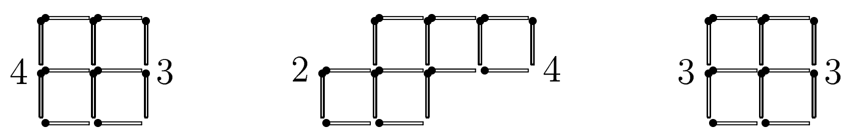




34. На рисунке из спичек сложен квадрат 3×3. Уберите
   а) 4 спички, чтобы осталось 5 квадратов;
   б) 8 спичек, чтобы осталось 2 квадрата;
   в) 6 спичек, чтобы осталось 3 квадрата.



35. Переложите указанное слева на рисунках число спичек, чтобы получилось указанное справа число квадратов.*)



36. а) Положите 12 спичек, чтобы получились четыре маленьких квадрата и один большой.
   б) Из 10 спичек составьте три квадрата.

---

*) Никаких болтающихся без дела спичек не должно быть!

Обратный ход

Не то чудо из чудес,
что упал мужик с небес,
а то чудо из чудес,
как он туда залез!

37. Я задумал число, умножил его на два, прибавил три и получил 17. Какое число я задумал?

38. Алёша задумал число. Он прибавил к нему 5, потом разделил сумму на 3, умножил на 4, отнял 6, разделил на 7 и получил число 2. Какое число задумал Алёша?

39. Женщина собрала в саду яблоки. Чтобы выйти из сада, ей пришлось пройти через 4 двери, каждую из которых охранял свирепый стражник, отбиравший половину яблок. Домой она принесла 10 яблок. Сколько яблок досталось стражникам?

40. Мама положила на стол сливы и сказала детям, чтобы они, вернувшись из школы, разделили их поровну. Первой пришла Аня, взяла треть слив и ушла. Потом вернулся из школы Боря, взял треть оставшихся слив и ушёл. Затем пришёл Витя и взял 4 сливы — треть от числа слив, которые он увидел. Сколько слив оставила мама?

41.* Из числа вычли сумму его цифр. Из полученного числа вновь вычли сумму его (полученного числа) цифр, и так делали снова и снова. После одиннадцати таких вычитаний впервые получился нуль. С какого числа начали?

---

42. Митя и Витя взвесили свои портфели. Весы показали 3 кг и 2 кг. Когда они положили портфели на весы, те показали 6 кг.
— Разве два плюс три равно шести?— воскликнул Витя.
— У весов сдвинута шкала,— догадался Митя,— Они показывают вес, который отличается на некоторую определённую величину от истинного.
Сколько весили портфели на самом деле?

Расстановки скобок и знаков

Работая над решением задачи,
всегда полезно знать ответ.

43. Расставьте, где это требуется, знаки арифметических действий и скобки, чтобы получились верные равенства:

а) $4\ 4\ 4\ 4 = 5$; б) $4\ 4\ 4\ 4 = 17$; в) $4\ 4\ 4\ 4 = 20$;

г) $4\ 4\ 4\ 4 = 32$; д) $4\ 4\ 4\ 4 = 64$; е) $4\ 4\ 4\ 4 = 48$;

ё) $5\ 5\ 5\ 5 = 26$; ж) $5\ 5\ 5\ 5 = 30$; з) $5\ 5\ 5\ 5 = 50$;

и) $5\ 5\ 5\ 5 = 55$; й) $5\ 5\ 5\ 5 = 120$; к) $5\ 5\ 5\ 5 = 130$;

л) $5\ 5\ 5\ 5 = 625$; м) $5\ 5\ 5\ 5 = 111$; н) $5\ 5\ 5\ 5 = 2$.

44. Использовав ровно пять раз цифру 3, знаки действий и скобки, представьте любое целое число от 0 до 11.

Подсказка. $(3-3)\cdot 333 = 0$, $33:3+3-3 = 11$.

45. Использовав ровно пять раз цифру 5, представьте любое целое число от 0 до 10.

Подсказка. $(5-5)\cdot(5+5+5) = 0$ и $5+5+(5-5)\cdot 5 = 10$.

46. Использовав ровно четыре раза цифру 4, скобки и знаки арифметических действий, представьте любое число от 0 до 10.

47. Использовав цифру 7 четыре раза, знаки действий и скобки, представьте все числа от 0 до 10.

Подсказка. $77-77 = 0$, $(77-7):7 = 10$.

48. Расставьте в записи $4 \cdot 12 + 18 : 6 + 3$ скобки, чтобы получилось а) число 50; б) наибольшее возможное число.

49. Ученик написал выражение $6 \cdot 8 + 20 : 4 - 2$, значение которого равно 58, но забыл поставить скобки. Сделайте это за него.

50. Между цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, написанными в указанном порядке, поставьте знаки сложения и умножения так, чтобы полученное выражение имело значение 100. (Использовать скобки нельзя. Между любыми двумя соседними цифрами должен стоять знак «+» или «·».)

Шутки

Не любо — не слушай,
а врать не мешай.

51. В корзине лежат 5 яблок. Разделите их между пятью лицами, чтобы каждый получил по яблоку, а одно яблоко осталось в корзине.

52. В семье 5 братьев. У каждого из них есть одна сестра. Сколько всего детей в семье?

53. Два отца и два сына съели за завтраком три яйца, причём каждому досталось целое яйцо. Могло ли так случиться?

54. В двух кошельках лежат две монеты, причём в одном кошельке монет вдвое больше, чем в другом. Может ли так быть?

55. Яблоко стоило 5 копеек, а груша — 10. Вова купил яблоко, а потом подумал: “Я уже заплатил 5 копеек, и у меня есть яблоко, которое стоит 5 копеек. Если я дам его продавцу, то он получит от меня в сумме 10 копеек. Значит, я смогу взять грушу. Это славно!” Прав ли он?

56. Подряд стоят шесть стаканов: три с водой и три пустых. Дотронувшись рукой лишь до одного стакана, добейтесь, чтобы пустые и полные стаканы чередовались.

57. Почему в поездах все стоп-краны всегда красные, а в самолётах все стоп-краны голубые?

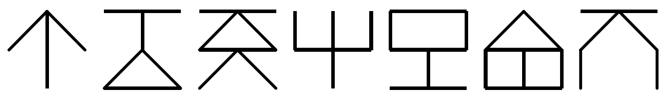
58. Один господин написал о себе: « … пальцев у меня двадцать пять на одной руке, столько же на другой, да на ногах десять … » Что он забыл?

59. Представьте себе корабль со спущенной на воду верёвочной лестницей вдоль борта. У лестницы 10 ступенек. Расстояние между ступеньками 30 см. Самая нижняя ступенька касается воды. Начинается прилив, который поднимает воду каждый час на 20 см. Через какое время покроется водой третья снизу ступенька лестницы?

60. Большой, зелёный, живёт под землёй и питается камнями. Кто это?

61. Остап Бендер решил дать сеанс одновременной игры Карпову и Каспарову. Один из них должен играть белыми, а другой — чёрными. Остап уверен, что он или сведёт вничью обе партии, или одну выиграет. Как он собирается играть?

62. Угадайте закономерность форм фигурок рисунка. Какую фигурку надо поставить следующей? А после неё?



А всё, однако же, как поразмыслишь,
во всём этом, право, есть кое-что.
Что ни говори, а подобные происшествия
бывают на свете; редко, но бывают.
Н. В. Гоголь

63. Король пожелал сместить своего министра, не слишком обидев его. Он подозвал министра к себе и предложил выбрать один из двух листочков, пояснив, что на одном написано «Останьтесь», а на другом — «Уходите». Листок, который вытащит министр, решит его судьбу. Министр догадался, что на обоих листках написано «Уходите». Помогите министру сохранить его место!

64. Из Москвы в Петербург помчал на «Volvo» предприниматель Вася. Навстречу в то же время на велосипеде выехал доцент Иван Петрович. Кто из них в момент встречи был ближе к Москве?

65. Какое наибольшее число сторон может иметь многоугольник, являющийся пересечением четырёхугольника и треугольника?

66*. Сын отца профессора разговаривает с отцом сына профессора, а профессор в разговоре не участвует. Может ли так быть?

П о д с к а з к а. Сын отца — это брат. А вот кто отец сына?..

Сбежали цифры

В этой сказке нет порядка —
что ни слово, то загадка.
Б. Заходер

67. Какое число в 7 раз больше своей последней цифры?

68. Расшифруйте «животноводческий» ребус: Б + БЕЕЕ = МУУУ.

69. Восстановите повреждённые записи арифметических действий, то есть замените звёздочки цифрами так, чтобы получились верные равенства:

а) $***-**=1$; б) $**\cdot*-*=1$; в) $1*\cdot*1=1**1$;

г) $\begin{array}{r} +\;5*\\ *84\\ \hline ***0 \end{array}$; д) $\begin{array}{r} +\;**\\ *\\ \hline **8 \end{array}$; е) $\begin{array}{r} +\;**\\ **\\ \hline *98 \end{array}$; ё) $\begin{array}{r} -\;6*5*\\ *8*4\\ \hline 2856 \end{array}$; ж) $\begin{array}{r} +\;3*86\\ *2*7\\ \hline 804* \end{array}$;

з) $\begin{array}{r} \times\;**\\ 52\\ \hline *6\\ +\;**\\ \hline *7* \end{array}$; и) $\begin{array}{r} \times\;126\\ **\\ \hline ***\\ +\;****\\ \hline 1*2*6 \end{array}$; й) $\begin{array}{r} \times\;27\\ **\\ \hline **8\\ +\;**\\ \hline 3** \end{array}$; к) $\begin{array}{r} \times\;2*\\ *2\\ \hline *8\\ +\;7*\\ \hline 7*8 \end{array}$; л) $\begin{array}{r} \times\;4*\\ *6\\ \hline 2*2\\ +\;2*5\\ \hline ***2 \end{array}$;

м) $\begin{array}{r} \times\;**\\ 8*\\ \hline ***\\ +\;**\\ \hline **** \end{array}$; н) $\begin{array}{r} \times\;***\\ *8\\ \hline ***\\ +\;****\\ \hline ****0 \end{array}$; о) $\begin{array}{r} \times\;***\\ *3*\\ \hline 3**\\ +\;**3*\\ 3**3\\ \hline ****** \end{array}$; п) $\begin{array}{r} \times\;***\\ ***\\ \hline *6**\\ +\;**66\\ 6*6\\ \hline ***** \end{array}$; р) $\begin{array}{r} \times\;6*\\ ***\\ \hline **\\ +\;**\\ **\\ \hline ***6 \end{array}$.

70. Серёжа записал пятизначное число и умножил его на 9. К своему удивлению, он получил в результате число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Какое число записал Серёжа?

71. Число оканчивается на 2. Если эту цифру перенести в начало числа, оно удвоится. Найдите наименьшее такое число.

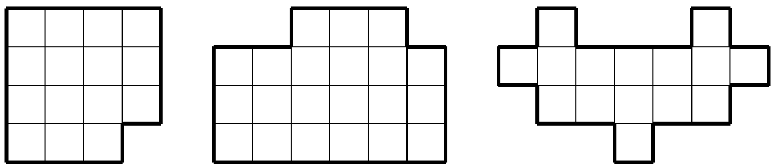
72. В арифметическом ребусе ДУБ + ДУБ + … + ДУБ = РОЩА требуется разные буквы заменить разными цифрами, одинаковые — одинаковыми. Какое наибольшее число «дубов» может быть в «роще»?

Разрезания

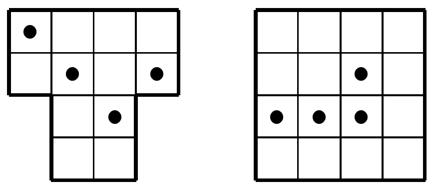
— Такой уже ты дряхлый и больной,
трясёшься, как разбитая телега ...
На что ты копишь деньги, старый Ной?
— На глупости. На доски для ковчега.

И. Губерман

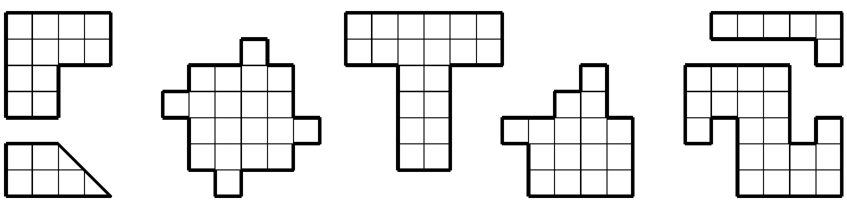
73. Разрежьте каждую из фигур на три равные части. (Резать можно только по сторонам клеточек. Части должны быть равны не только по площади, но и по форме.)



74. Разделите каждую из фигур по линиям сетки на четыре одинаковые части, чтобы в каждой части был ровно один кружок.



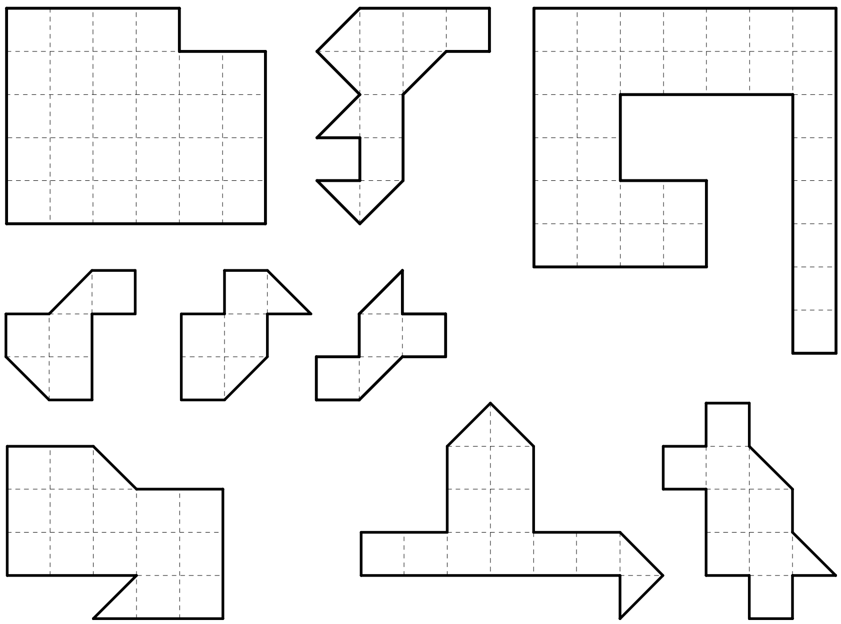
75. Разрежьте каждую из фигур на четыре равные части. (Резать можно только по сторонам и диагоналям клеточек.)



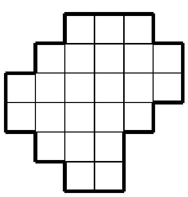
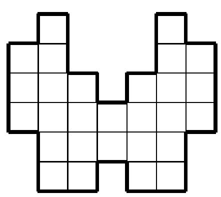
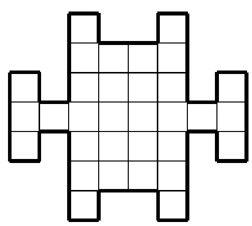
76. Разрежьте квадрат на два равных а) пятиугольника; б) шестиугольника; в) семиугольника.

77. Разрежьте квадрат на три (не обязательно равных) шестиугольника.

78. Разрежьте каждую из фигур пополам.



79. Разрежьте каждую из фигур на четыре равные (и по площади, и по форме) части.

а)  б)  в) 

80*.* Разрежьте квадрат 7×7 на пять частей и переложите их так, чтобы получились три квадрата: 2×2, 3×3 и 6×6. Постарайтесь сделать это несколькими способами.

Всякая палка о двух концах

Адвокату следует открыто и ясно
изложить дело, потом уже он сам
сумеет запутать его.
А. Манцони

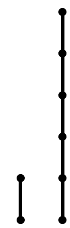
81. От куска сукна в 16 метров портной отрезает ежедневно по 2 метра. По истечении ско́льких дней он отрежет последний кусок?

81.′ Каждую минуту от бревна длины 6 аршин отпиливают 1 аршин. За сколько минут распилят всё бревно?

82. Во сколько раз лестница на шестой этаж дома длиннее лестницы на второй этаж этого же дома?

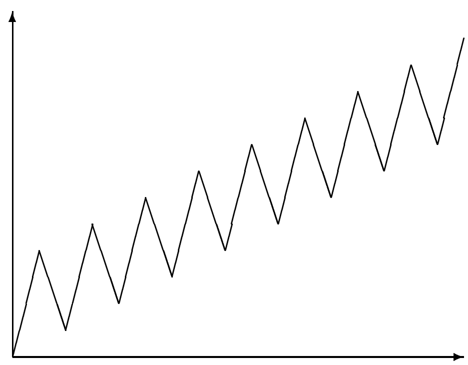
83. Сколько распилов надо сделать, чтобы распилить 60 трёхметровых брёвен на полуметровые поленья?*)

84. Кузнец соединил 5 цепей, по 3 звена в каждой, в одну цепь, раскрыв 4 кольца и снова их заковав. Нельзя ли было выполнить работу быстрее?



85. В шесть часов утра в понедельник гусеница начала вползать на дерево высотой 12 м. За день, то есть до 18 часов, она поднималась на 4 м, а за ночь спускалась на 3 м. Когда она достигнет вершины?

Указание. На рисунке изображён график движения гусеницы.



*)Пилить несколько брёвен одновременно нельзя.

86. Золотошвея разместила 20 учениц в комнатах своего дома, как показано на рисунке. По вечерам она проверяла, чтобы в комнатах на каждой стороне дома было 7 девушек. Однажды в гости к ним приехали 4 подружки.

2	3	2
3		3
2	3	2

а) Разместите всех так, чтобы золотошвея насчитала вдоль каждой стороны опять 7 девушек.

б) На следующий день 4 девушки провожали подруг. Разместите 16 оставшихся так, чтобы опять с каждой стороны оказалось по 7 девушек.

Двенадцать стульев

Проделайте такой эксперимент: сосредоточьтесь и следующую минуту не думайте о жёлтой весёлой прыгающей всюду обезьяне.

87. Поставьте 12 стульев в 3 ряда, чтобы
а) в двух рядах было по 4 стула, а в одном — 6;
б) в каждом ряду было по 5 стульев.

88. Разместите вдоль стен квадратной комнаты 10 стульев так, чтобы у каждой стены стояло 3 стула.

89. а) Расположите 6 точек на 4 отрезках, чтобы на каждом отрезке было 3 точки.
б) Нарисуйте 5 равных по длине отрезков таким образом, чтобы на них можно было расположить 10 точек — на каждом отрезке по 4 точки.
в) Нарисуйте 6 отрезков и отметьте 9 точек, чтобы на каждом отрезке было 3 точки.
г) Нарисуйте 6 отрезков и отметьте 12 точек, чтобы каждому отрезку принадлежали 4 точки.

90. Поставьте 24 стула в 6 рядов по 5 стульев в каждом.

Устный счёт

Изучите азы науки, прежде чем взойти на её вершины. Никогда не беритесь за последующее, не усвоив предыдущее.
И. П. Павлов

91. Сколько раз к наибольшему однозначному числу надо прибавить наибольшее двузначное число, чтобы получить наибольшее трёхзначное?

92. У Акулины и Анфисы денег поровну. Сколько денег должна дать одна из них другой, чтобы у Анфисы стало на 10 рублей больше, чем у Акулины?

93. Два пакета молока и пачка творога стоят 94 копейки. А две пачки творога и пакет молока стоят 80 копеек. Что дороже: пачка творога или пакет молока? На сколько?

94. В зоомагазине продают больших и маленьких птиц. Большая птица вдвое дороже маленькой. Купили 5 больших птиц и 3 маленьких. Если бы вместо этого купили 3 больших птицы и 2 маленьких, то потратили бы на 20 рублей меньше. Сколько стоит большая птица?

95. Сколько дедушке лет, столько месяцев внучке. Вместе им 91 год. Сколько лет дедушке и сколько внучке?

96. Деду, отцу и сыну вместе 100 лет. Отцу и сыну вместе 45 лет. Сын на 25 лет моложе отца. Сколько кому лет?

97. Если к моим деньгам добавить половину их, да ещё 10 рублей, то у меня станет 100 рублей. Сколько у меня денег?

98. Деду 64 года, а внуку 16 лет. Через сколько лет дед станет втрое старше внука?

98.′ Решите уравнение
$$64 + x = 3(16 + x)\,.$$

99. Брат втрое богаче меня, отец втрое богаче брата, дед втрое богаче отца, а у нас вместе 1000 рублей. Сколько у меня денег?

100. Корова вчетверо дороже собаки, а лошадь вчетверо дороже коровы. Собака, две коровы и лошадь стоят 200 рублей. Сколько стоит корова?

101. Сын вдвое моложе отца. Родился он, когда отцу было 24 года. Сколько лет сыну?

101.′ Сын втрое моложе отца. Когда отцу было 40 лет, сыну было 3 года. Сколько лет отцу?

— Сколько будет один плюс один плюс один плюс один плюс один плюс один плюс один плюс один плюс один плюс один?
— Не знаю,— ответила Алиса,— Я сбилась со счёта.
— Она не умеет складывать.
Льюис Кэррол, «Приключения Алисы в Стране чудес»

102. На двух руках 10 пальцев. А на 10 руках?

103. 3 курицы за 3 дня снесли 3 яйца. Сколько яиц снесут 12 кур за 12 дней?

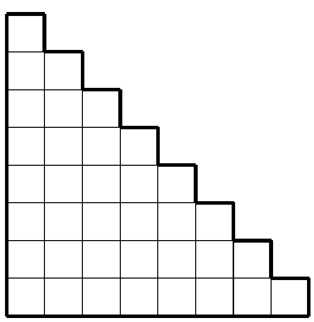
104. Пять рыбаков съели пять судаков за пять дней. За сколько дней десять рыбаков съедят десять судаков?

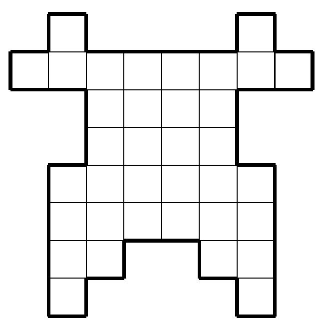
105. Три землекопа за 2 часа вырыли 3 ямы. Сколько ям выроют 6 землекопов за 5 часов?

106.* 6 косцов выпили бочонок кваса за 8 часов. Сколько косцов за 3 часа выпьют такой же бочонок?

---

107. Разрежьте фигуры на трёхклеточные уголки.

а) 

б) 

Возрасты

Некая дама на вопрос, сколько ей лет, ответила: “Когда я выходила замуж, мужу было 40, а мне 20. Сейчас ему 60. Значит, мне 30.”

108. Серёже 11 лет, Вове 1 год. Сколько лет будет Серёже, когда он станет втрое старше Вовы?

109. Если к половине моих лет прибавите 7, то получите мой возраст 13 лет тому назад. Сколько мне лет?

110. а) Когда отцу было 27 лет, сыну было 3 года. Сейчас сыну в три раза меньше лет, чем отцу. Сколько лет каждому из них?
б) Решите уравнение $27 + x = 3(x + 3)$.

111. Абдулла вчетверо старше Махмуда. Сумма их возрастов — 50 лет. Через сколько лет Абдулла будет втрое старше Махмуда?

112. Отец старше сына в 4 раза. Через 20 лет он будет старше сына в 2 раза. Сколько сейчас лет отцу?

113. Некто сказал: “Когда я проживу ещё половину, да треть, да четверть моих лет, мне станет 100 лет.” Сколько ему лет?

114. Москва старше Петербурга на 556 лет. В 1981 году Москва была втрое старше Петербурга. а) В каком году основана Москва и в каком году основан Петербург?
б) Когда Москва станет ровно вдвое старше Петербурга?

115. Отцу 32 года, сыну 5 лет. Через сколько лет отец будет в 10 раз старше сына?

Решение. Обозначим искомый срок через x. Спустя x лет отцу будет $32 + x$ лет, а сыну — $(5 + x)$. Поскольку отец должен быть в 10 раз старше сына, то $32 + x = 10(5 + x)$.

Решая это уравнение, получаем ответ: $x = -2$. «Через минус 2 года» означает «два года назад». Составляя уравнение, мы не думали о том, что возраст отца никогда в будущем не окажется в 10 раз больше возраста сына. Уравнение оказалось вдумчивее нас и позаботилось обо всём само.

116. Отцу столько лет, сколько сыну и дочери вместе; сын вдвое старше сестры и на 20 лет моложе отца. Сколько лет дочери?

117. Эльдару через 2 года будет вдвое больше лет, чем ему было 2 года назад, а Элина через 3 года будет втрое старше, чем была 3 года назад. Кто из них старше?

118. Мне вдвое больше лет, чем было Вам тогда, когда мне было столько лет, сколько Вам сейчас. Сколько мне лет, если нам вместе 70 лет?

Решение. Составим таблицу*):

	Мой возраст	Ваш возраст
Сейчас	x	y
Тогда	y	$x/2$

Посчитав двумя способами время, отделяющее «сейчас» от «тогда», составим уравнение:

$$x - y = y - \frac{x}{2},$$

откуда $\frac{3}{2}x = 2y$. Значит, $3x = 4y$. Поскольку $x + y = 70$, ответ очевиден: $x = 40$, $y = 30$. Мне сейчас 40 лет.

119. Когда Коля был молод, как Оля, годом меньше было тётушке Поле, чем Коле теперь вместе с Олей. Сколько лет было Коле, когда тётушка Поля была в возрасте Коли?

120. Альфире втрое больше лет, чем было Эльдару, когда она была в его нынешнем возрасте. Когда он будет в её нынешнем возрасте, им вместе будет 28 лет. Сколько сейчас лет Альфире и сколько — Эльдару?

121. Игнату сейчас вчетверо больше лет, чем было его сестре в тот момент, когда она была вдвое моложе его. Сколько лет сейчас Игнату, если через 15 лет ему и сестре вместе будет 100 лет?

122. Юре и Юле сейчас вместе 26 лет, причём Юле в три раза меньше лет, чем будет Юре тогда, когда им вместе будет в пять раз больше лет, чем Юре сейчас. Сколько лет Юре?

*) «Тогда» относится ко времени, когда мне было столько лет, сколько Вам сейчас.

Сколько надо взять?

Если из книги вытекает какой-нибудь поучительный вывод, это должно получаться помимо воли автора, в силу самих изображённых фактов.

Ги де Мопассан

123. В коробке лежат 10 красных и 10 синих воздушных шариков. Продавец, не глядя, достаёт по одному шарику. Сколько шариков надо вытащить, чтобы среди вынутых из коробки шариков обязательно нашлись два шарика одного цвета?

124. Сколько карандашей надо взять в темноте из коробки с 7 красными и 5 синими карандашами, чтобы было взято не меньше двух красных и не меньше трёх синих?

125. В пакете перемешали конфеты трёх сортов, неразличимых на ощупь. Какое наименьшее число конфет надо взять наугад из пакета, чтобы среди взятых конфет обязательно были хотя бы а) две; б) три одного сорта?

126. Сколько карандашей можно взять в темноте из коробки, в которой 10 красных, 8 синих, 8 зелёных и 4 жёлтых карандашей, чтобы в коробке заведомо осталось
а) не меньше 6 синих карандашей?
б) хотя бы по одному карандашу каждого цвета?
в) не больше 6 синих карандашей?

127. В ящике 28 красных, 20 зелёных, 12 жёлтых, 20 синих, 10 белых и 10 чёрных шариков. Сколько шариков надо вытащить, не заглядывая в ящик, чтобы среди вытащенных шариков обязательно оказалось не менее 15 шариков одного цвета?

Наводящий вопрос. Сколько шариков может выбросить из ящика забравшийся в него недоброжелатель, чтобы среди выброшенных не было 15 одноцветных шариков?

128. В тёмной кладовой в беспорядке лежат ботинки: 10 пар чёрных и 10 пар коричневых. Сколько ботинок надо взять, чтобы среди них оказалась хотя бы одна пара (левый и правый ботинок) одного цвета? (В темноте нельзя отличить не только цвет ботинка, но и левый от правого.)

Указание. Если возьмём 20 ботинок, то может оказаться, что все они на левую ногу: 10 левых коричневых и 10 левых чёрных. Значит, надо взять 21 ботинок. Осталось понять, почему при любом способе выбора 21 ботинка из 40 имеющихся найдётся хотя бы одна пара. Это кажется очевидным. Но как убедительно и немногословно обосновать это утверждение?

129. В гости пришло 6 человек в галошах разного размера. Расходились по одному, и некоторые надевали галоши большего размера. Сколько могло остаться гостей, не сумевших надеть галоши? А если гостей не 6, а 17?

130. Винни-Пух, Пятачок, Кролик и ослик Иа-Иа съели 70 бананов, причём каждому сколько-то досталось. Винни-Пух съел больше каждого из остальных, а Кролик и Пятачок вместе съели 45 бананов. Сколько бананов досталось ослику?

Даже если объяснение настолько ясно, что
исключает всякое ложное толкование,
всё равно найдётся человек,
который всё перепутает.

131*.* В погребе 8 банок клубничного варенья, 7 малинового и 5 вишнёвого. Сколько банок можно в темноте вынести из погреба с уверенностью, что там останутся ещё хотя бы 4 банки одного сорта варенья и 3 банки другого?

132. Какое минимальное число фишек надо взять, чтобы при любой их расстановке на клетках шахматной доски обязательно встретились бы 4 фишки, стоящие друг за другом по горизонтали?

133. Какое наибольшее число клеток можно отметить на шахматной доске, чтобы среди отмеченных клеток не было соседних (ни по стороне, ни по вершине) и чтобы добавление к этим клеткам любой другой клетки нарушало бы это условие?

Гонки

Корабль на мели — моряку маяк.
(Голландская пословица)

134. Машина едет со скоростью 60 км/ч. На сколько следует увеличить скорость, чтобы выиграть на каждом километре по одной минуте?

135. Между лисой и зайцем 10 м. Когда лиса поймает зайца, если она бежит со скоростью 8 м/с, а он — со скоростью 7 м/с?

136. Послан человек из Москвы в Вологду, и проходит он каждый день 40 вёрст. На следующий день вслед послан другой человек, проходящий 45 вёрст в день. Когда второй догонит первого?

137. В дневнике у Вовочки уже записано 200 замечаний, а у Машеньки — 112. Через сколько недель они сравняются, если Машенька получает на 22 замечания в неделю больше, чем Вовочка?

138. Я иду от дома до школы 30 минут, а мой брат — 40 минут. Через сколько минут я догоню брата, если он вышел из дома на 5 минут раньше меня?

139. Пассажир, проезжая в трамвае, заметил знакомого, который шёл вдоль линии трамвая в противоположную сторону. Через 10 секунд пассажир вышел из трамвая и пошёл догонять своего знакомого. Через сколько секунд он догонит знакомого, двигаясь в два раза быстрее знакомого и в пять раз медленнее трамвая?

140. Грузовик проезжает некоторое расстояние за 10 часов. Если бы он проезжал в час на 10 км больше, то тот же путь занял бы 8 часов. Какова скорость грузовика?

141. Два автомобиля одновременно выехали из пунктов A и B навстречу друг другу. Через 7 часов езды они находились на расстоянии 136 км один от другого. Найдите расстояние между A и B, если всё расстояние один автомобиль может проехать за 10 часов, а другой — за 12.

142. За 5 часов мотоциклист проезжает на 259 км больше, чем велосипедист за 4 часа. За 10 часов велосипедист проезжает на 56 км больше, чем мотоциклист за 2 часа. Определите скорость велосипедиста.

143. Из городов A и B навстречу друг другу выехали два автомобиля и встретились через 8 часов. Если бы скорость автомобиля, выехавшего из A, была больше на 14%, а скорость автомобиля, выехавшего из B, была больше на 15%, то встреча произошла бы через 7 часов. Скорость какого автомобиля больше и во сколько раз?

144. Пройдя $3/8$ длины моста, ослик Иа-Иа заметил автомобиль, приближающийся со скоростью 60 км/ч. Если ослик побежит назад, то встретится с автомобилем в начале моста; если вперёд, автомобиль нагонит его в конце моста. С какой скоростью бегает Иа-Иа?

145. Дорога от дома до школы занимает у Вовы 20 минут. Однажды он по дороге в школу вспомнил, что забыл дома ручку. Вова знал, что если он продолжит путь в школу с той же скоростью, то придёт туда за 8 минут до звонка, а если вернётся домой за ручкой, то, двигаясь с той же скоростью, опоздает к началу урока на 10 минут. Какую часть пути он прошёл?

146. Поезд проходит*) мост длиной 450 метров за минуту и полминуты идёт мимо телеграфного столба. Найдите длину и скорость поезда.

147. Белка за 20 минут приносит орех в гнездо. Сколь далеко расположен орешник от гнезда, если налегке белка бежит со скоростью 5 м/с, а с орехом — 3 м/с?

148. На дороге, соединяющей два аула, нет ровных участков. Автобус едет в гору со скоростью 15 км/ч, а под гору — 30 км/ч. Путь туда и обратно автобус проезжает за 4 часа без остановок. Найдите расстояние между аулами.

---

*) Считая с момента, когда поезд начал въезжать на мост, до момента, когда он целиком съехал с него.

Чётность

Я делаю из мухи слона, но муха
должна быть настоящей.
Фазиль Искандер

149. Представьте каждое из чисел 1101 и -1101 в виде а) $2n+1$; б) $2n-1$; в) $2n+333$.

150. Произведение любых двух нечётных чисел нечётно, а сумма двух нечётных чисел — чётна. Докажите это.

151. Докажите, что если сумма двух целых чисел нечётна, то произведение этих чисел чётно.

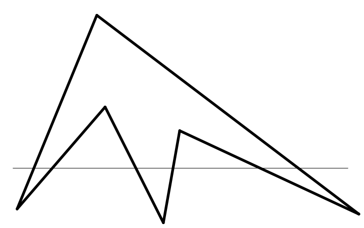
152. Разность двух целых чисел умножили на их произведение. Могли ли получить число 110 618 110 145 210 181 543?

153. Двадцать лет тому назад в ходу были купюры достоинством 1, 3, 5, 10 и 25 рублей. Докажите, что если 25 рублей разменяли десятью такими купюрами, то хотя бы одна из этих десяти купюр — десятка.

154. Чётова пишет на доску одно целое число, а Нечётов — другое. Если произведение чётно, победителем объявляют Чётову, если нечётно, то Нечётова. Может ли кто-то из них играть так, чтобы непременно выиграть?

155. По кругу зацеплены 9 шестерёнок: первая со второй, вторая с третьей, … , девятая с первой. Могут ли они вращаться?

156. На рисунке прямая пересекает все стороны шестиугольника. Может ли прямая пересекать все стороны 11-угольника, не проходя ни через одну его вершину?



157. 100 фишек поставлены в ряд. Разрешено менять местами любые две фишки, стоящие через одну. Можно ли поставить фишки в обратном порядке?

158. В роте 100 человек. Каждую ночь дежурят трое. Можно ли так организовать дежурство, чтобы через некоторое время каждый единожды подежурил с каждым?

159. Николай с сыном и Пётр с сыном были на рыбалке. Николай поймал столько же рыб, сколько его сын, а Пётр — втрое больше, чем его сын. Всего поймали 25 рыб. Сколько рыб поймал Николай?

160. В ряд выписаны числа от 1 до 10. Можно ли расставить между ними знаки «+» и «−» так, чтобы значение полученного выражения было равно нулю?

161. Можно ли стереть одно из данных а) 1992; б) 1993 целых чисел так, чтобы сумма оставшихся чисел была чётна?

162. Можно ли натуральные числа $1, 2, \ldots, 21$ разбить на несколько групп, в каждой из которых наибольшее число равно сумме всех остальных чисел этой группы?

163. Даны шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Разрешено к любым двум числам прибавить по единице. Можно ли сделать все числа равными?

164. На 99 карточках пишут числа $1, 2, \ldots, 99$, перемешивают их, раскладывают чистыми сторонами вверх и снова пишут числа $1, 2, \ldots, 99$. Для каждой карточки складывают два её числа и 99 полученных сумм перемножают. Докажите, что результат чётен.

165. На кубе отмечены вершины и центры граней, а также проведены диагонали всех граней. Можно ли по отрезкам диагоналей обойти все отмеченные точки, побывав в каждой из них ровно по одному разу?

166. На некотором поле шахматной доски стоит король. Двое по очереди передвигают его по доске. Запрещено возвращать короля на поле, где он только что был. Выигрывает тот игрок, кто поставит короля на поле, где король когда-то уже побывал. Кто из игроков может обеспечить себе победу при любой игре противника?

Логика

А что у мух всегда вид пасмурный бывает,
И часто голова ногою подперта,
И бровь насуплена, тому причина та,
Что мухи много разумеют
И в глубину вещей стараются входить,
А не одни вершки учёности схватить.

Иван Хемницер

167. Встретились три друга: Белов, Чернов и Рыжов. “Волосы одного из нас белые, другого — чёрные, третьего — рыжие, но ни у кого цвет волос не соответствует фамилии”, — заметил черноволосый. “Ты прав”, — подтвердил Белов. Какие у кого волосы?

168. За сутки до дождя Петин кот всегда чихает. Сегодня кот чихнул. “Завтра будет дождь”,— подумал Петя. Прав ли он?

169. Рядом сидят мальчик и девочка.

— Я мальчик,— говорит черноволосый ребёнок.

— Я девочка,— говорит рыжий ребёнок.

Если хотя бы кто-то из них врёт, кто мальчик, а кто девочка?

170. В тетради написано 100 утверждений:

В этой тетради ровно одно ложное утверждение.
В этой тетради ровно два ложных утверждения.
. . . .
. . . .
В этой тетради ровно сто ложных утверждений.

Какое из этих утверждений верно?

171. а) В коробке карандаши не все одной длины и не все одного цвета. Докажите, что есть два карандаша, отличающиеся и по цвету, и по длине.

б) В магазин привезли платья трёх цветов и трёх фасонов. Можно ли выбрать для витрины 3 платья, чтобы были представлены все цвета и фасоны?

172. — У Вовы больше тысячи книг, — сказал Ваня.
— Нет, книг у него меньше тысячи,— возразила Аня.
— Одна-то книга у него наверняка есть,— сказала Маня.
Если истинно только одно из этих утверждений, сколько книг у Вовы?

173. Один из попугаев A, B, C всегда говорит правду, другой всегда врёт, а третий хитрец — иногда говорит правду, иногда врёт. На вопрос *«Кто B?»* они ответили:
A: — Лжец.
B: — Я хитрец!
C: — Абсолютно честный попугай.
Кто из попугаев лжец, а кто хитрец?

174. До царя дошла весть, что кто-то из трёх богатырей убил Змея Горыныча. Приказал царь им явиться ко двору. Молвили богатыри:
Илья Муромец: — Змея убил Добрыня Никитич.
Добрыня Никитич: — Змея убил Алёша Попович.
Алёша Попович: — Я убил змея.
Известно, что только один богатырь сказал правду, а двое слукавили. Кто убил змея?

175. В конференции участвовало 100 человек — химики и алхимики. Каждому был задан вопрос: «Если не считать Вас, то кого больше среди остальных участников — химиков или алхимиков?» Когда опросили 51 участника, и все ответили, что алхимиков больше, опрос прервался. Алхимики всегда лгут, а химики всегда говорят правду. Сколько химиков среди участников?

176. Алёша, Боря, Ваня и Гриша соревновались в беге. На вопрос, кто какое место занял, они ответили:
Алёша: — Я не был ни первым, ни последним.
Боря: — Я не был последним.
Ваня: — Я был первым.
Гриша: — Я был последним.
Известно, что трое сказали правду, а один соврал. Кто победил в соревновании? Кто сказал неправду?

Полпути вдвое медленнее — потратим то же время

Во время какой-то осады по городу шёл разносчик воды и кричал: "Вода! Вода! Два ведра по шесть су!" Пролетевшая бомба разнесла на куски одно из вёдер. "Вода! Вода! Двенадцать су ведро!",— как ни в чём ни бывало затянул разносчик.

Шамфор

177. Двое одновременно отправились из A в B. Первый поехал на велосипеде, а второй — на автомобиле со скоростью, в пять раз большей скорости первого. На полпути автомобиль сломался, и оставшуюся часть пути автомобилист прошёл пешком со скоростью, в два раза меньшей скорости велосипедиста. Кто из них раньше прибыл в B?

178. Путь от дома до школы Буратино проделал пешком. Обратно он двигался той же дорогой, но первую половину пути он проехал на собаке, а вторую половину пути — на черепахе. Известно, что скорость собаки в четыре раза больше, а скорость черепахи — в два раза меньше, чем скорость, с которой Буратино шёл в школу. На какой путь — из дома до школы или из школы до дома — затратил Буратино больше времени?

179. Петя отправился пешком из лагеря в райцентр. В 12 часов, когда Петя был в a км от лагеря, его нагнал велосипедист и подвёз, высадив в a км от райцентра. После этого Петя продолжил путь пешком и пришёл в райцентр в 14 часов. Сколько времени потребуется Пете на обратный путь, если на велосипеде его везли с вдвое большей скоростью, чем он ходит пешком?

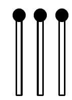
180.* Мотоциклист и велосипедист выехали одновременно из пункта A в пункт B. Проехав треть пути, велосипедист остановился и поехал дальше лишь тогда, когда мотоциклисту оставалась треть пути до B. Мотоциклист, доехав до B, сразу поехал обратно. Кто приедет раньше: мотоциклист в A или велосипедист в B?

Дурацкие вопросы

Напрасно умный очи пучит
на жизнь дурацкую мою,
ведь то, что умный только учит,
я много лет преподаю.

И. Губерман

181. Три спички лежат на столе. Удалите среднюю спичку из середины, не трогая её.



182. Можно ли так бросить мяч, чтобы он, пролетев некоторое расстояние, остановился и начал двигаться в обратном направлении?

183. Арбуз разрезали на 4 части и съели. Могло ли получиться 5 корок?

184. Сколько концов у 4 палок? У 5 палок? У 4 с половиной палок?

185. Ничего не ломая и не разрезая, создайте на столе а) треугольник при помощи одной спички; б) квадрат при помощи двух спичек.

186. Малыш съедает одно пирожное за одну минуту. За какое время он съест 1000 пирожных?

187. Если двенадцать человек, работая по восемь часов в день, должны выкопать яму глубиной в десять с половиной миль, сколько времени пройдёт — считая и воскресные дни! — прежде чем они положат свои лопаты?

188. Впишите в пустые клетки таблицы недостающие числа.

7	10	13
22		30
4	9	

189. Продолжите последовательность чисел: 1, 11, 21, 1112, 3112, 211213, 312213, 212223, 114213, …

П о я с н е н и е. Математик скажет, что можно написать любое число. Да, это так. Строго говоря, задача сформулирована неточно. Но постарайтесь всё-таки решить её, то есть найдите простое правило, по которому образована эта последовательность. Если не получится, не расстраивайтесь — возможно, Вы слишком умны и серьёзны для таких шуточек.

190. Ковбой вошёл в бар и попросил воды. Вместо ответа хозяин выхватил кольт и выстрелил в потолок. Ковбой поблагодарил и вышел. В чём дело?

191. Юноша шёл по дороге и заметил валявшийся на обочине моток колючей проволоки. Он побежал домой, взял кусачки, вернулся к проволоке и одну за другой откусил все колючки. Затем он бросил проволоку и колючки там, где стоял, и продолжил свой путь, как ни в чём ни бывало. В чём дело?

Следующую задачу вряд ли можно решить перебора вариантов. Сомнительна и её научная ценность. Тем не менее, я хочу рассказать об этом курьёзе. Есть в нём что-то симпатичное.

192. Рассмотрим четырёхзначное число, не все цифры которого одинаковы. Расставим цифры в порядке убывания и в порядке возрастания. (При этом может получиться «число», первая цифра которого равна нулю. Не будем обращать на это внимания.) Вычтем из одного другое. Получим новое число, к нему применим ту же операцию, и так далее. Например,

$$
-\begin{array}{r}9971\\ \underline{1799}\\ 8172\end{array}
\rightarrow
-\begin{array}{r}8721\\ \underline{1278}\\ 7443\end{array}
\rightarrow
-\begin{array}{r}7443\\ \underline{3447}\\ 3996\end{array}
\rightarrow
-\begin{array}{r}9963\\ \underline{3699}\\ 6264\end{array}
\rightarrow \ldots
$$

или

$$
-\begin{array}{r}9972\\ \underline{2799}\\ 7173\end{array}
\rightarrow
-\begin{array}{r}7731\\ \underline{1377}\\ 6354\end{array}
\rightarrow
-\begin{array}{r}6543\\ \underline{3456}\\ 3087\end{array}
\rightarrow
-\begin{array}{r}8730\\ \underline{0378}\\ 8352\end{array}
\rightarrow \ldots
$$

Повторив эту операцию шесть раз, получим какое-то число. Какое?

193. Ляпусики, у которых есть варкала, не все бармаглоты. У ляпусиков, которые умеют хрюкотать и при этом не бармаглоты, варкал нет. Верно ли, что не все ляпусики, у которых есть варкала, умеют хрюкотать?

194. Предположим, что справедливы следующие утверждения.

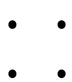
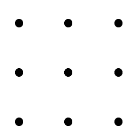
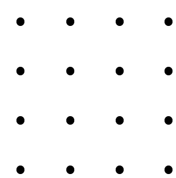
- Среди людей, имеющих телевизоры, есть такие, которые не являются малярами.
- Люди, каждый день купающиеся в бассейне, но не являющиеся малярами, не имеют телевизоров.

Верно ли, что не все владельцы телевизоров каждый день купаются в бассейне?

195. В тюрьму поместили 100 узников. Надзиратель сказал им: «Я дам вам вечер поговорить друг с другом, а затем рассажу по отдельным камерам, и общаться вы больше не сможете. Иногда я буду кого-нибудь из вас отводить в комнату, где есть лампа. Уходя из комнаты, вы можете оставить лампу хотите включённой, хотите — выключенной. Если в какой-то момент кто-то из вас скажет мне, что вы все уже побывали в комнате и окажется прав, то я всех выпущу на свободу. А если он ошибётся — скормлю крокодилам. И не волнуйтесь, что кого-то забуду: если будете молчать, то вы все побываете в комнате, причём ни для кого никакое посещение комнаты не станет последним.» Придумайте стратегию, гарантирующую узникам освобождение. (Включена или выключена лампа изначально — неизвестно.)

---

196. Не отрывая карандаш от бумаги, проведите через все
а) вершины квадрата три отрезка, вернувшись в исходную точку;
б) девять точек, расположенных в виде квадрата, четыре отрезка (возвращаться в исходную точку не обязательно);
в) шестнадцать точек, расположенных в виде квадрата, шесть отрезков, вернувшись в исходную точку.

а)  б)  в) 

Переливания

Я чуть не плакал. Не было удачи!
Задача не решалась — хоть убей.
Условье было трудным у задачи.
Дано: «Летела стая лебедей».
Я, щёку грустно подперев рукою,
Делил, слагал — не шли дела на лад!
Но, лишь глаза усталые закрою,
Я видел ясно: вот они — летят ...

Е. Винокуров

197. Имеются два ведра — одно ёмкостью 4 л, другое 9 л. Можно ли набрать из реки ровно 6 литров воды?

198. Имеются двое песочных часов: на 7 минут и на 11 минут. Каша должна вариться 15 минут. Как сварить её, перевернув часы минимальное количество раз?

199. Из полного восьмилитрового ведра отлейте 4 литра с помощью пустых трёхлитровой банки и пятилитрового бидона. (Никаких сосудов, кроме данных трёх, нет. На землю ничего выплёскивать нельзя, так что в конце концов должно оказаться 4 литра в восьмилитровом сосуде и 4 — в пятилитровом.)

200. Отлейте из цистерны 13 литров молока, пользуясь бидонами ёмкостью 17 и 5 литров.

201. Двенадцативедёрная бочка наполнена керосином. Разлейте его на две равные части, пользуясь пустыми пятиведёрной и восьмиведёрной бочками.

202. В баке не менее 10 литров бензина. Можно ли отлить 6 литров с помощью девятилитрового ведра и пятилитрового бидона?

203. В бочке не менее 13 вёдер бензина. Можно ли отлить 8 вёдер с помощью девятиведёрной и пятиведёрной бочек?

204. Имея два полных 10-литровых бидона молока и пустые 4- и 5-литровые кастрюли, отмерьте по 2 литра молока в каждую кастрюлю. (Как и в предыдущих задачах, выливать на землю ничего нельзя!)

Проценты*)

— Так это же известная задача!
— А как она решается?
— Да нет! Условие известное,
а решения я не знаю.

205. Ученик прочитал 138 страниц, что составляет 23% числа всех страниц в книге. Сколько страниц в книге?

206. Разложите 80 тетрадей на две стопки так, чтобы число тетрадей одной из них составило 60% числа тетрадей другой стопки.

207. Когда из первого бидона перелили во второй 12,5% находившегося в первом бидоне молока, то молока в бидонах стало поровну, по 35 литров. Сколько молока было во втором бидоне?

208. Множимое увеличили на 50%, а множитель уменьшили на 50%. Как изменилось произведение?

209. Что больше: 15,43% от 5 или 5% от 15,43?

210. Как изменится цена товара, если сначала её увеличить на 100%, а затем уменьшить на 50%?

211. Цену картофеля повысили на 20%. Через некоторое время её понизили на 20%. Когда картофель стоил дешевле: до повышения или после снижения?

212. A, B и C состязались в беге на 100 м. Когда A финишировал, B отставал от него на 10 м. Когда B финишировал, C отставал на 10 м. На сколько отставал C от A, когда A закончил бег?

212.′ В одном магазине цены уменьшили на 10%, а потом ещё на 10% (от нового уровня). А в другом цены просто сразу снизили на 20%. Что выгоднее для покупателя?

213. За весну Обломов сбавил в весе 25%, за лето прибавил 20%, за осень похудел на 10%, а за зиму прибавил 20%. Похудел он или поправился за год?

---

*) Цент — одна сотая часть условной единицы.

214. Цены снизили на 20%. На сколько процентов больше товара можно купить на ту же зарплату?

215. Вода Тихого Океана содержит 3,5% соли (по весу). Сколько пресной воды надо прибавить к 40 кг такой воды, чтобы содержание соли в смеси составило 0,5%?

216. Из 22 кг свежих грибов получается 2,5 кг сухих грибов, содержащих 12% воды. Каков процент воды в свежих грибах?

217. Алик, Боря и Вася собирали грибы. Боря собрал грибов на 20% больше, чем Алик, но на 20% меньше, чем Вася. На сколько процентов больше, чем Алик, собрал грибов Вася?

218. Предприятие получило задание за два года снизить на 51% объём выпускаемой продукции. Каждый год требуют снижать на одно и то же число процентов. На сколько?

219. В сосуде было 20 литров спирта. Часть его отлили и долили столько же воды. Затем, перемешав, отлили такую же часть и сосуд опять долили водой. В сосуде спирта оказалось втрое меньше, чем воды. Какую часть отливали?

220. Число 51,2 трижды увеличивали на одно и то же число процентов, а затем трижды уменьшали на то же самое число процентов. В результате получилось число 21,6. На сколько процентов увеличивали, а затем уменьшали это число?

221. М. В. Ломоносов тратил одну денежку на хлеб и квас. Когда цены выросли на 20%, на ту же денежку он приобретал полхлеба и квас. Хватит ли той же денежки хотя бы на квас, если цены ещё раз вырастут на 20%?

222. Пройдя половину пути, катер увеличил скорость на 25% и поэтому прибыл на полчаса раньше. Сколько времени он двигался?

223. В сентябре проездной билет на метро стоил 800 рублей. В октябре стоимость билета увеличили, в результате чего число проданных билетов уменьшилось на 25%, а выручка от их продажи уменьшилась на 6,25%. Сколько стал стоить проездной билет в октябре?

Книга стоит рубль ...

Чтоб речь родную не забыть,
на ней почти не говоря,
интересуюсь я купить
себе большого словаря.

И. Губерман

224. Книга стоит 1 рубль и ещё половину своей стоимости. Сколько она стоит?

225. На одну чашку весов положили круг сыра, а на другую — 3/4 такого же круга и ещё килограммовую гирю. Установилось равновесие. Сколько весит круг сыра?

226. За книгу заплатили рубль, и осталось заплатить ещё столько, сколько осталось бы заплатить, если бы за неё заплатили столько, сколько осталось заплатить. Сколько стоит книга?

227.* Если головоломка, разгаданная перед тем, как разгадали эту, была труднее, чем головоломка, которую разгадали после того, как разгадали головоломку, которую разгадали перед тем, как разгадали эту, то была ли головоломка, которую разгадали перед тем, как разгадали эту, труднее, чем эта?

228. Учитель задал на уроке сложную задачу. В результате число мальчиков, решивших эту задачу, оказалось равным числу девочек, её не решивших. Кого в классе больше: учеников, решивших задачу, или девочек?

---

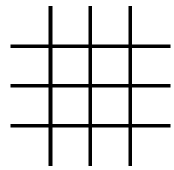
229. Придумайте а) четырёхзначное число, десятичная запись которого состоит из одинаковых цифр, но в его русском названии все слова начинаются с разных букв; б) трёхзначное число, запись[*)] которого состоит из различных цифр, следующих в порядке возрастания, а в его названии[†)] все три слова начинаются с одной и той же буквы.

[*)] *Для Придиры.* В десятичной системе счисления.
[†)] *Для него же.* Язык, разумеется, русский.

Восстановите путь коня ...

Пик истины высок неимоверно;
Придётся покружить по склону, чтоб
Достичь вершины — нет дороги в лоб!
Спеши, доколе день, а тьма сгустится —
Тогда уж будет поздно торопиться.
Джон Донн (1572–1631)

230. На рисунке 6 отрезков расположены так, что каждый пересекает три других отрезка. Расположите 8 отрезков, чтобы каждый пересекал три других отрезка.



231. Трём хирургам необходимо последовательно прооперировать в полевых условиях больного, страдающего заразным заболеванием. Сами хирурги тоже больны, причём все — разными болезнями. В распоряжении хирургов есть лишь две пары стерильных перчаток. Подскажите план операции, после которой ни хирурги, ни больной не заразятся друг от друга. (Помогать друг другу во время операций хирурги не должны. Оперировать одной рукой нельзя.)

232. Восстановите по сохранившимся номерам путь коня, побывавшего по одному разу на всех клетках доски размером 6×6. (То есть расставьте числа от 1 до 36 так, чтобы отличающиеся на 1 были связаны ходом коня.)

17				11	
2			25		
23	16	1			
30			19		
15				13	
8					35

233. Покройте семью синими квадратными ковриками красный квадратный коврик такого же размера так, чтобы синие коврики не налегали друг на друга, но каждый синий покрывал какую-то часть красного.

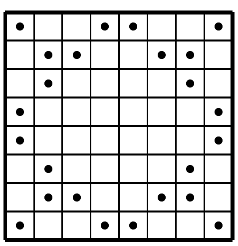
234. Дама сдавала в багаж диван, чемодан, саквояж, картину, корзину, картонку и маленькую собачонку. Диван весил столько же, сколько чемодан и саквояж, вместе взятые, и столько же, сколько картина, корзина и картонка вместе. Картина, корзина и картонка весили поровну; каждая из них весила больше, чем собачонка. Когда выгружали багаж, дама заявила, что собака не той породы. При проверке оказалось, что собака перевешивает диван, если к ней на весы добавить саквояж или чемодан. Докажите, что претензия дамы была справедлива.

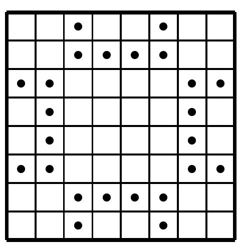
235. Три человека — A, B и C — пересчитали кучу шариков четырёх цветов. Каждый из них правильно различал два цвета, а два других не различал: кто-то один из них не различал красный и оранжевый, другой не различал оранжевый и жёлтый, а ещё один не различал жёлтый и зелёный. Глядя на таблицу, узнайте, сколько каких шариков было.

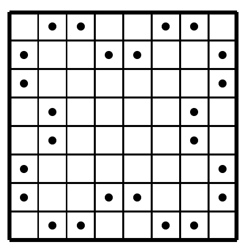
	красный	оранжевый	жёлтый	зелёный
A	2	5	7	9
B	2	4	9	8
C	4	2	8	9

236. Первая слева цифра десятизначного числа равна числу единиц в записи этого числа, вторая — числу двоек, третья — числу троек, четвёртая — числу четвёрок, ... , девятая — числу девяток, десятая — числу нулей. Придумайте такое число.

237. На рисунках показаны разные способы расставить на шахматной доске 24 коня, каждый из которых бьёт двух других. Расставьте на доске 32 коня, чтобы каждый из них бил ровно двух других.







Сумма и среднее арифметическое

— Какая сегодня средняя температура по больнице? — спросил ревизор главврача.

238. Два человека отправились на рынок продавать яблоки. У них было по 30 яблок. Один собирался продавать по 2 яблока за 1 рубль, а другой — по 3 яблока за 1 рубль. Перед началом торговли первого продавца вызвали домой, и он попросил второго продавца продать его яблоки. Тот стал продавать по 5 яблок за 2 рубля. Если бы они торговали порознь, то выручили бы 10 рублей и 15 рублей, а продавая по 5 яблок за 2 рубля, они получили 24 рубля. Куда исчез рубль?

239. Разбейте $\{1, 2, 9, 25, 49, 64\}$ на два подмножества, чтобы сумма чисел одного из них была равна сумме чисел другого.

240. Разделите полоску на 4 одинаковые части, чтобы все части имели одну и ту же сумму входящих в них чисел.

1	9	16	7	12	5	4	3
8	15	10	2	13	6	11	14

241. Аня и Таня вместе весят 40 кг, Таня и Маня — 50 кг, Маня и Ваня — 90 кг, Ваня и Даня — 100 кг, Даня и Аня — 60 кг. Сколько весит Аня?

242. Четверо купцов заметили, что если они сложатся без первого, то соберут 90 рублей, без второго — 85, без третьего — 80, без четвёртого — 75 рублей. Сколько у кого денег?

242.′ Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} y + z + t = 90, \\ x + z + t = 85, \\ x + y + t = 80, \\ x + y + z = 75. \end{cases}$$

243. Средний возраст 11 игроков футбольной команды — 22 года. Во время матча один игрок получил травму и ушёл с поля. Средний возраст оставшихся игроков — 21 год. Сколько лет получившему травму?

244. Когда Миша поступал в МГУ, учитывался средний балл аттестата о среднем образовании по двенадцати предметам. У Миши средний балл был равен 3,5. По скольким предметам ему нужно было повысить оценку на один балл, чтобы средний балл оказался равен 4?

245. Учитель проводит урок в классе. Возраст учителя на 24 года больше среднего возраста учеников и на 22 года больше среднего возраста всех присутствующих в классе. Сколько в классе учеников?

---

246. Прямоугольник разбит прямыми на 25 прямоугольников. Площади некоторых из них указаны на рисунке. Найдите площадь прямоугольника, отмеченного вопросительным знаком.

?				20
			14	10
		32	28	
	35	40		
9	21			

247. Катя, Лена, Маша, Нина участвовали в концерте. Каждую песню пели 3 девочки. Катя пела 8 песен — больше всех; Нина меньше всех — 5 песен. Сколько песен было спето?

248. Можно ли натуральные числа от 1 до 30 записать в таблицу из 5 строк и 6 столбцов, чтобы все шесть сумм чисел, стоящих в столбцах, были равны?

249. Можно ли заполнить числами таблицу а) 5×5; б) 6×6 так, чтобы произведение всех чисел любой строки было отрицательно, а произведение всех чисел любого столбца — положительно?

249! Можно ли расставить числа в таблице 19×66 так, чтобы в каждой строке сумма чисел была положительна, а в каждом столбце — отрицательна?

Составление уравнений

Математики похожи на французов: что бы вы ни сказали, они всё переведут на свой собственный язык. Получится нечто противоположное.

И. В. Гёте

250. Голова рыбы весит столько, сколько хвост и половина туловища, туловище — столько, сколько голова и хвост вместе. Хвост её весит 1 кг. Сколько весит рыба?

251. Ученик должен был разделить число на 2 и к результату прибавить 3, а он, по ошибке, умножил число на 2 и от полученного частного отнял 3. Ответ всё равно получился правильный. Какой?

252. Один сапфир и два топаза ценней, чем изумруд, в три раза. А семь сапфиров и топаз его ценнее в восемь раз. Определить прошу я вас: сапфир ценнее иль топаз?

253. Четверо товарищей покупают лодку. Первый вносит половину суммы, вносимой остальными; второй — треть суммы, вносимой остальными; третий — четверть суммы, вносимой остальными; четвёртый — 130 рублей. Сколько стоит лодка?

254. Офеня*) купил на оптовом рынке партию ручек и предлагает покупателям либо одну ручку за 5 рублей, либо три ручки за 10 рублей. От каждого покупателя офеня получает одинаковую прибыль. Какова оптовая цена ручки?

255. Представьте число 45 в виде суммы четырёх чисел так, что после прибавления 2 к первому числу, вычитания 2 от второго числа, умножения третьего числа на 2 и деления четвёртого числа на 2 эти числа становятся равными.

256. Истратив половину денег, я заметил, что осталось вдвое меньше рублей, чем было первоначально копеек, и столько же копеек, сколько было первоначально рублей. Сколько денег я истратил? (Подразумевается, что число копеек меньше 100.)

---

*) Продавец в разнос, коробейник.

257. Из горячего крана ванна заполняется за 23 минуты, из холодного — за 17 минут. Пьер открыл сначала горячий кран. Через сколько минут он должен открыть холодный, чтобы к моменту наполнения ванны горячей воды налилось в 1,5 раза больше, чем холодной?

258. Артели косцов предстояло скосить два луга, из которых один вдвое больше другого. Полдня артель косила большой луг, а на вторую половину дня разделилась пополам. Одна половина осталась докашивать большой луг, а другая принялась за малый. К вечеру большой луг скосили, а от малого остался участок, который был скошен за другой день одним косцом. Сколько косцов в артели?

259. На дне озера бьют ключи. Стадо из 183 слонов могло бы выпить озеро за один день, а стадо из 37 слонов — за 5 дней. За сколько дней выпьет озеро один слон?

260. (*И. Ньютон*) 70 коров съели бы всю траву за 24 дня, а 30 коров — за 60 дней.*) Сколько коров съели бы траву за 96 дней?

261. В Великобритании и США температуру раньше измеряли по шкале Фаренгейта, в которой температура плавления льда (то есть 0° Цельсия) составляет 32°, а температура кипения воды (100° Цельсия) — 212°. Формула для перевода температуры из одной шкалы в другую такова: $T_{Ф} = kT_{Ц} + b$, где $T_{Ф}$ и $T_{Ц}$ — температуры по Фаренгейту и по Цельсию. а) Найдите числа k и b. б) Существует ли температура, числовые значения которой по шкалам Цельсия и Фаренгейта одинаковы?

262. Управдом Остап Бендер собирал с жильцов деньги на установку новых квартирных номеров. Адам Козлевич из 105-й квартиры поинтересовался, почему у них во втором подъезде надо собрать денег на 40% больше, чем в первом, хотя квартир там и тут поровну. Не растерявшись, Остап объяснил, что двузначные номера стоят вдвое, а трёхзначные — втрое больше, чем однозначные. Сколько квартир в подъезде?

---

*) Не удивляйтесь: трава растёт.

Принцип Дирихле

Многие вещи нам непонятны не потому,
что наши понятия слабы; но потому,
что сии вещи не входят
в круг наших понятий.
Козьма Прутков

В несерьёзной форме принцип Дирихле[*)] *гласит: "Нельзя посадить 7 кроликов в 3 клетки, чтобы в каждой было не больше 2 кроликов."*

Более общая формулировка: "Если z зайцев сидят в k клетках, то найдётся клетка, в которой не менее z/k зайцев." *Не надо бояться дробного число зайцев — если получается, что в ящике не меньше 7/3 зайцев, значит, их больше двух.*

Один математик сказал, что Дирихле по частоте упоминаний школьниками навсегда обеспечено одно из самых высших мест. И добавил: "Пожалуй, есть способ лишить его лидерства — назвать чьим-нибудь именем принцип «никакое чётное число не равно никакому нечётному»."

Доказательство принципа Дирихле очень простое, но заслуживает внимания, поскольку похожие рассуждения «от противного» часто встречаются. Допустим, что в каждой клетке число зайцев меньше, чем z/k. *Тогда в* k *клетках зайцев меньше, чем* $k \cdot (z/k) = z$. *Противоречие!*

263. В школе 400 учеников. Докажите, что хотя бы двое из них родились в один день года.

264. В классе 40 учеников. Найдётся ли такой месяц в году, в котором отмечают свой день рождения не меньше чем 4 ученика этого класса?

[*)] Петер Густав Лежён Дирихле (1805–1859), великий немецкий математик, изучал арифметику (теорема Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии), математический анализ (признак сходимости Дирихле, ряды Дирихле), механику и математическую физику (принцип Дирихле в теории гармонических функций).

265. В классе 30 учеников. В диктанте Вова сделал 13 ошибок, остальные меньше. Докажите, что по крайней мере три ученика сделали ошибок поровну.

266. Из любых трёх целых чисел можно выбрать два, сумма которых чётна. Докажите это.

Решение. Все числа можно разбить на два класса: чётные и нечётные. Невозможно распределить три числа по двум классам так, чтобы ни в какой класс не попало более одного числа. Значит, среди любых трёх целых чисел найдутся два числа одинаковой чётности. Их сумма чётна.

267. Среди любых шести целых чисел найдутся два числа, разность которых кратна 5. Докажите это.

268. Докажите, что из любых $n+1$ целых чисел можно выбрать два числа, разность которых нацело делится на n.

269. Даны 12 различных двузначных чисел. Докажите, что из них можно выбрать два числа, разность которых — двузначное число, записываемое двумя одинаковыми цифрами.

270. Из любых ли ста целых чисел можно выбрать два числа, сумма которых кратна 7?

271. Существуют ли а) пятьдесят; б) более пятидесяти различных двузначных чисел, сумма никаких двух из которых не равна 100?

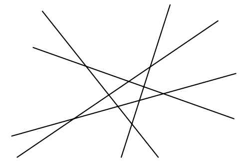
272. Из любых ли а) 51; б) 52 целых чисел можно выбрать два числа, сумма или разность которых кратна 100?

273. На шахматной доске стоят 44 ферзя. Докажите, что каждый из них бьёт какого-нибудь другого ферзя.

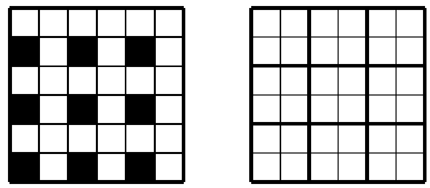
274. Каждый из 10 участников переговоров послал по их окончании поздравительные открытки пятерым другим участникам. Докажите, что какие-то двое послали открытки друг другу.

275. В группе 30 человек. Каждому нравятся ровно k людей из этой группы. При каком наименьшем k обязательно найдутся два человека из этой группы, которые нравятся друг другу?

276. На плоскости нарисовали 5 прямых. Докажите, что угол между какими-то двумя из них не больше 36°. (Если какие-нибудь прямые параллельны, считайте, что угол между ними равен 0°.)



277. Какое наибольшее число клеток доски 6×6 можно покрасить, чтобы никакие две покрашенные клетки не соприкасались (даже в одной точке)?



Решение. Ответ очевиден из рисунка, на котором никакие две из девяти закрашенных клеток не соприкасаются, а десятую клетку с соблюдением условия не покрасишь. Но как доказать, что никаким другим способом нельзя расположить на доске десять несоприкасающихся клеток? Перебором? Вариантов гораздо больше, чем кажется на первый взгляд. И уж совсем невозможно решение методом перебора, если доску 6×6 заменить, например, на доску размером 2000×2000. Оказывается, можно разбить доску на квадратики размером 2×2. Больше одной окрашенной клетки в таком квадратике быть не может!

278. На шахматной доске нельзя разместить более 32 не бьющих друг друга коней. Докажите это.

279. Найдите значение дроби а) $\dfrac{\text{В}\cdot\text{А}\cdot\text{Р}\cdot\text{Е}\cdot\text{Н}\cdot\text{Ь}\cdot\text{Е}}{\text{К}\cdot\text{А}\cdot\text{Р}\cdot\text{Л}\cdot\text{С}\cdot\text{О}\cdot\text{Н}}$;

б) $\dfrac{\text{Г}\cdot\text{Р}\cdot\text{У}\cdot\text{З}\cdot\text{И}\cdot\text{Я}}{\text{Т}\cdot\text{Б}\cdot\text{И}\cdot\text{Л}\cdot\text{И}\cdot\text{С}\cdot\text{И}}$, где разные буквы — это разные цифры.

280. Из любых а) пяти; б) восьми; в) девяти целых чисел можно выбрать два таких, разность квадратов которых делится на а) 7; б) 13; в) 16. Докажите это.

281. В какое наибольшее число цветов можно раскрасить клетки доски 8×8 так, чтобы у каждой клетки среди её соседей (по стороне) были хотя бы две клетки, окрашенные в тот же цвет?

Обходы

Когда судьба, дойдя до перекрёстка,
колеблется, куда ей повернуть,
не бойся неназойливо, но жёстко
слегка её коленом подтолкнуть.

И. Губерман

282. В кабине лифта 20-этажного дома есть две кнопки. При нажатии на одну из них лифт поднимается на 13 этажей, а при нажатии на другую — опускается на 8 этажей. Как попасть с 13-го этажа на 8-й?

283. Обойдите конём доску а) 4×5; б) 4×6; в) 4×7, побывав на каждом поле по одному разу. (Возвращаться на исходное поле не обязательно.)

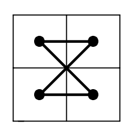
284. Из шахматной доски выпилено угловое поле. Может ли конь обойти все оставшиеся поля по одному разу и вернуться на исходное поле?

285. Кузнечик прыгает на 1 см, потом прыгает на 3 см в том же или противоположном направлении, затем в том же или противоположном направлении на 5 см, и так далее. Может ли он после 25-го прыжка оказаться в исходной точке?

286. Из шахматной доски вырезаны клетки $f3$ и $c6$. Можно ли обойти оставшиеся клетки, на каждой побывав ровно один раз и каждым ходом переходя на клетку, у которой общая сторона с предыдущей?

287. Муравей ползает по проволочному каркасу куба, никогда не поворачивая назад. Может ли оказаться, что в одной вершине он уже побывал 25 раз, а в каждой из остальных — по 20 раз?

288. На рисунке изображён маршрут короля, обошедшего доску размером 2×2, чередуя диагональные и недиагональные ходы и побывав на каждой клетке по одному разу. Нарисуйте такой маршрут для доски 8×8.



Лингвистические задачи

Если надо — язык суахили,
сложный звуком и словом обильный,
чисто выучат внуки Рахили
и фольклор сочинят суахильный.
И. Губерман

289. Даны французские слова **tour, face, coucher, attacher, passage, orange, variété, chance, torche, rager, image, courage, révérence** и их переводы в перепутанном порядке: **факел, смелость, проход, лицо, почтение, привязывать, поездка, образ, разнообразие, лежать, удобный случай, апельсин, неистовствовать**. Установите, какое французское слово какому русскому соответствует.

290. Вот обозначения некоторых дат на языке суахили: **tarehe tatu Disemba jumamosi; tarehe pili Aprili jumanne; tarehe nne Aprili jumanne; tarehe tano Octoba jumapili; tarehe tano Octoba jumatatu; tarehe tano Octoba jumatano.** А вот их переводы на русский язык (в перепутанном порядке): **5 октября, понедельник; 2 апреля, вторник; 5 октября, среда; 5 октября, воскресенье; 3 декабря, суббота; 4 апреля, вторник.** Как написать на языке суахили следующие даты: а) 3 апреля, среда; б) 2 декабря, воскресенье; в) 1 ноября, понедельник?

291. Вот несколько айнских числительных (в латинской транскрипции):

3 — re;
11 — shine ikashma wan;
22 — tu ikashma hotne;
37 — arwan ikashma wan e tu hotne;
47 — arwan ikashma tu hotne;
93 — re ikashma wan e ashikne hotne;
135 — ashikne ikashma wan e arwan hotne.

Определите, какое число записывается по-айнски как **wan e re hotne**. Запишите по-айнски числа: 1, 5, 12, 53, 100, 200.

Взвешивания

Чтобы правильно задать вопрос, нужно знать бо́льшую часть ответа.
Р. Шекли «Верный вопрос»

292. Из трёх одинаковых по виду колец одно несколько легче других, имеющих одинаковые массы. Как за одно взвешивание найти более лёгкое кольцо?

293. Можно ли определить вес тела, если коромысла чашечных весов «неправильные», а гири «правильные»?

294. Из четырёх деталей одна отличается по весу от остальных, имеющих одинаковый вес. Можно ли выделить её двумя взвешиваниями на весах с двумя чашками без гирь?

295. Из а) 75; б) 101 одинаковых по виду колец одно кольцо (мы не знаем, какое именно) по весу несколько отличается от остальных. Можно ли за два взвешивания на чашечных весах определить, легче или тяжелее это кольцо, чем остальные?*)

296. Илье Муромцу, Добрыне Никитичу и Алёше Поповичу за верную службу дали 6 монет: 3 золотые и 3 серебряные. Каждому досталось по две монеты. Илья Муромец не знает, какие монеты достались Добрыне, а какие Алёше, но знает, какие монеты достались ему самому. Придумайте вопрос, на который Илья Муромец ответит «да», «нет» или «не знаю» и по ответу на который вы сможете понять, какие монеты ему достались.

— О ужас! Ваш слуга убит!
Он надвое разрезан, мистер Смит!
Ну, что ж. Тогда любезность окажите,
Ту половину, где ключи, пришлите.

Если надо угадать задуманное кем-то число за наименьшее число вопросов, а отвечают лишь «да» или «нет», то самое

*) Вы не обязаны находить это кольцо.

лучшее — всякий раз делить множество, в котором находится число, пополам.

Например, если задумано число от 1 до 8, то определить его наверняка можно за 3 вопроса, а быстрее, вообще говоря, нельзя.

297. Разложите по семи кошелькам 127 рублёвых бумажек, чтобы любую сумму от 1 до 127 рублей можно было бы выдать, не открывая кошельков.

298. За сколько вопросов можно наверняка отгадать целое число, заключённое между 1 и 1000, если на вопросы отвечают только «да» или «нет»?

299. а) Из 9 монет одна фальшивая — более лёгкая, чем настоящие. Двумя взвешиваниями на чашечных весах без гирь найдите её. Сколько требуется взвешиваний для б) 27; в) 80; г) 2003 монет?

300*. Имеются две красные, две жёлтые и две зелёные гири. В каждой паре одна из гирь немного легче, а другая тяжелее. Все три тяжёлые гири весят одинаково. Все три лёгкие гири тоже весят одинаково. Определите за 2 взвешивания на чашечных весах, какая из гирь в каждой паре тяжелее.

301. 68 алмазов различны по весу. За 100 взвешиваний на чашечных весах без гирь найдите самый лёгкий и самый тяжёлый алмаз.

302. В гостиницу приехал путешественник. У него была лишь серебряная цепочка из 7 звеньев. За каждый день пребывания в гостинице он расплачивался одним звеном цепочки.
а) Какое звено цепочки надо распилить, чтобы прожить в гостинице 7 дней и ежедневно расплачиваться с хозяином? (Хозяин может давать сдачу звеньями, полученными им ранее.)
б)* Сколько звеньев пришлось бы распилить, если бы путешественник жил в гостинице 100 дней с цепочкой из 100 звеньев?

303. В 9 мешках все монеты настоящие (весят по 10 г), а в одном все фальшивые (весят по 11 г). Одним взвешиванием на точных весах со стрелкой определить, в каком мешке фальшивые монеты.

304. Имеются 4 пакета и чашечные весы без гирь. За 5 взвешиваний расположите пакеты по весу.

305.* Среди 12 монет имеется одна фальшивая. Найдите её за три взвешивания на весах с двумя чашками без гирь, если неизвестно, легче она или тяжелее остальных.

306.* На суде в качестве вещественного доказательства предъявлено 14 монет. Суд знает, что фальшивые монеты весят одинаково, настоящие монеты весят одинаково и фальшивые монеты легче настоящих. Эксперт обнаружил, что монеты с 1-й по 7-ю фальшивые, а с 8-й по 14-ю — настоящие. Как он может доказать это за три взвешивания на чашечных весах без гирь?

307.* Имеется шесть одинаковых с виду гирек массой 1, 2, 3, 4, 5 и 6 г соответственно. На гирьках сделали надписи: «1 г», «2 г», «3 г», «4 г», «5 г» и «6 г». Как двумя взвешиваниями на чашечных весах без других гирек проверить правильность всех шести надписей?

308. а) На какое наименьшее число частей надо разрезать торт, чтобы его можно было раздать поровну как троим, так и четверым?

б) Сколько комнат должно быть в квартире, куда можно заселить 1, 2, 3 или 4 семьи, разделив жилплощадь поровну между вселяемыми семьями?

в)* Какое наименьшее число гирь (не обязательно одинаковых) может быть разложено и на 3, и на 4, и на 5 куч одинаковой массы?

г)* Какое наименьшее число гирь (не обязательно одинаковых) может быть разложено и на 4, и на 5, и на 6 куч одинаковой массы?

---

309. В классе число отсутствующих учеников составляло 1/6 часть числа присутствующих. Когда из класса вышел один ученик, число отсутствующих стало равно 1/5 числа присутствующих. Сколько учеников в классе?

Совместная трапеза, совместная работа

Живёт же кот Василий
на свете без усилий.
Лариса Миллер

310. Лошадь съедает копну сена за 2 суток, корова — за 3, овца — за 6 суток. За какое время съедят копну сена лошадь, корова и овца вместе?

311. На мельнице есть три жернова. На первом за сутки можно смолоть 60 четвертей зерна, на втором — 54, а на третьем — 48. Некто хочет смолоть 81 четверть зерна. За какое наименьшее время он сможет смолоть зерно?

312. В комнате оказалось 300 вёдер воды. Два насоса стали выкачивать воду. Один насос за 2 часа выкачивает 48 вёдер, другой за 6 часов — 129 вёдер. Через сколько часов выкачают всю воду, если ежечасно с потолка поступает 8 вёдер воды?

313. В бак вмещается 60 литров воды. К нему проведены две трубы. Через первую трубу за 10 минут можно наполнить пустой бак. Через вторую трубу за 15 минут можно опорожнить полный бак. Сколько воды окажется в баке через 5 минут, если открыть обе трубы?

314. Через кран вода заполняет бак за 3 часа, а через сливное отверстие вся вода из бака выливается за 5 часов. За какое время вода заполнит бак при открытых кране и отверстии?*)

315. Шерлок Холмс и доктор Ватсон, работая вместе, могут вырыть канаву за 6 часов. Если бы Холмс рыл 4 часа, а затем Ватсон — 6 часов, то канава была бы вырыта на 80%. За сколько часов Холмс, работая в одиночку, вырыл бы эту канаву?

316. Одна снегоуборочная машина могла бы убрать всю улицу за 1 час, а другая — за 45 минут. Начав работу одновременно, машины проработали вместе 20 минут, после чего первая

*) Считайте, что скорость вытекания воды из бака не зависит от его наполненности.

сломалась. Через сколько минут вторая машина закончила работу?

317. Одна мельница перемалывает 19 центнеров пшеницы за 3 часа, другая — 32 центнера за 5 часов, третья — 10 центнеров за 2 часа. Как распределить между ними 133 тонны пшеницы, чтобы, одновременно начав работу, они окончили её одновременно?

318. Один человек выпьет кадь пития за 14 дней, а вместе с женою — за 10 дней. За сколько дней жена выпьет ту же кадь?*)

318.′ За десять дней пират Ерёма способен выпить бочку рома, а у пиратушки Емели ушло б на это две недели. За сколько дней прикончат ром пираты, действуя вдвоём?

319. Малыш может съесть торт за 10 минут, банку варенья — за 8 минут, а кастрюлю простокваши — за 15 минут. Карлсон может сделать это за 2, 3 и 4 минуты соответственно. За какое время они вместе могут покончить с завтраком, состоящим из торта, банки варенья и кастрюли простокваши?

320. За $3\frac{1}{2}$ часа работы первый штамповочный пресс может изготовить 42% всех заказанных деталей. Второй пресс за 9 часов работы может изготовить 60% всех деталей. Скорость работы третьего пресса на 20% больше скорости второго пресса. За какое время будет выполнен весь заказ при одновременной работе всех трёх прессов?

321. Три тракторные бригады вместе вспахали поле за 4 дня. Это же поле первая и вторая бригады вместе вспахали бы за 6 дней, а первая и третья вместе — за 8 дней. Во сколько раз больше площадь, вспахиваемая за три дня второй бригадой, по сравнению с площадью, вспахиваемой за два дня третьей бригадой?

322. Иван, Пётр и Кирилл косили траву. Пётр и Кирилл скосили бы всю траву вдвое быстрее, чем Иван. Иван и Кирилл скосили бы

*) Эта задача — из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого.

всю траву втрое быстрее, чем Пётр. Во сколько раз быстрее, чем Кирилл, скосили бы всю траву Иван и Пётр?

323. Четыре чёрненьких чумазеньких чертёнка чертили чёрными чернилами чертёж четыре часа. Если бы первый чертёнок чертил вдвое быстрее, а второй — вдвое медленнее, то им потребовалось бы столько же времени; если бы, наоборот, первый чертил вдвое медленнее, а второй — вдвое быстрее, то они управились бы за два часа сорок минут. За какое время начертили бы чертёж первые три чертёнка без помощи четвёртого?

324.* Три каналоармейца копали канаву. Сначала первый каналоармеец проработал половину времени, необходимого двум другим, чтобы вырыть всю канаву, затем второй проработал половину времени, необходимого двум другим, чтобы вырыть всю канаву, наконец, третий проработал половину времени, необходимого двум другим, чтобы вырыть всю канаву. В результате канава была вырыта. Во сколько раз быстрее была бы вырыта канава, если бы с самого начала работали все трое вместе?

325.* а) Три пирата захватили корабль с разнообразнейшим добром. Каждый уверен, что он бы поделил добычу на равные части, но остальные ему не доверяют. Если бы пиратов было двое, то выйти из положения было бы легко: один разделил бы добычу на две части, а другой взял бы ту, которая ему кажется бóльшей. Организуйте раздел добычи между тремя пиратами, чтобы никто не чувствовал себя обделённым. (Добыча настолько разнородна и вкусы пиратов настолько несхожи, что объективного способа сравнения отдельных частей не существует.) б) А если пиратов не 3, а 15?

326. У одного араба был кувшин молока, у другого — хлеб, а у третьего — 6 фиников. За обед третий араб заплатил остальным 20 монет. Как следует разделить эти деньги, если ели поровну, 4 кувшина молока стоят столько же, сколько 3 хлеба, а один кувшин молока равноценен 36 финикам?

Делимость

Целое число a делится на *целое число b, если существует такое целое число k, что $a = kb$.*

327. К числу 15 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 15.

327.′ К числу 10 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы получилось число, кратное 72.

328. Некоторое число делится на 4 и на 6. Обязательно ли оно делится на 24?

329. Найдите наибольшее натуральное число, делящееся на 36, в записи которого участвуют все 10 цифр по одному разу.

330. На доске написано: $645{*}7235$. Замените звёздочку цифрой так, чтобы полученное число делилось на 3.

331. Замените звёздочки в записи числа $72{*}3{*}$ цифрами так, чтобы число делилось без остатка на 45.

332. В стране Анчурии в обращении имеются купюры следующих достоинств: 1 анчур, 10 анчуров, 100 анчуров, 1000 анчуров. Можно ли отсчитать миллион анчуров так, чтобы получилось ровно полмиллиона купюр?

333. Найдите двузначное число, первая цифра которого равна разности между этим числом и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке.

$$\begin{array}{r} -\,\text{АБ} \\ \underline{\text{БА}} \\ \text{А} \end{array}$$

334. Верно ли, что если записать в обратном порядке цифры любого целого числа, то разность исходного и нового чисел будет делиться на 9?

335. Найдите все двузначные числа, сумма цифр которых не меняется после умножения ни на 2, ни на 3, ..., ни на 8, ни на 9.

336. Существует ли целое число, произведение цифр которого равно 528?

337. Сколько цифр в числе $11\ldots11$, если оно делится без остатка на $999\,999\,999$?

338. В числе переставили цифры и получили число, в 3 раза меньшее исходного. Докажите, что исходное число делится на 27.

339. К числу прибавили сумму его цифр. К полученному числу прибавили сумму его цифр, и так далее. Когда в седьмой раз к числу прибавили сумму его цифр, получили 1000. С какого числа начали?

340. Незнайка перемножил все числа от 1 до 100. Посчитал сумму цифр произведения. У полученного числа он снова посчитал сумму цифр, и так далее. В конце концов Незнайка получил однозначное число. Какое?

З а м е ч а н и е. На компьютере легко посчитать, что число 100! — произведение первых 100 натуральных чисел — равно 93326215443944152681699238856266700490715968264381621468592963895217599993229915608941463976156518286253697920827223758251185210916864000000000000000000000000, всего 158 цифр. Зная это, нетрудно вычислить, что сумма цифр числа 100! равна 648, так что сумма цифр суммы цифр равна 18, а сумма цифр суммы цифр суммы цифр числа 100! равна 9. Но нельзя ли решить задачу без таких вычислений?

341. У каждого из чисел от 1 до $1\,000\,000\,000$ подсчитали сумму его цифр, у каждого из получившегося миллиарда чисел снова подсчитали сумму цифр, и так до тех пор, пока не получили миллиард однозначных чисел. Каких чисел получили больше всего?

342. Петя заменил в примере на умножение одинаковые цифры одинаковыми буквами, а разные — разными. Докажите, что он ошибся.

$$\text{АБ} \cdot \text{ВГ} = \text{ДДЕЕ}$$

343. а) Докажите, что числа вида $\overline{aa}$, $\overline{abcabc}$, $\overline{abcdeabcde}$ делятся на 11.

б) Если к произвольному числу приписать число, записанное теми же цифрами в обратном порядке, то полученное число без остатка разделится на 11: например, числа вида $\overline{aa}$, $\overline{abba}$, $\overline{abccba}$ кратны 11. Докажите это.

Игры

Есть вещи, которые спокойно можно объяснить дважды и трижды, не опасаясь, что тебя поймут.

Премудрая Сова

344. Двое по очереди ставят на шахматную доску ладьи (за один ход — одну ладью), чтобы они не били друг друга. (Кто какую ладью поставил, не учитывается. Нельзя ставить ладью даже под бой своей ладьи.) Кто не может поставить ладью, проигрывает. Кто выиграет при правильной игре — первый или второй?

345. Аня и Таня выписывают 8-значное число, ставя цифры по очереди, начиная со старшего разряда. Начинает Аня. Может ли Таня добиться, чтобы число делилось на 9?

346. Ладья стоит на поле $a1$. За ход разрешается сдвинуть её на любое число количество клеток вправо или на любое число клеток вверх. Выигрывает тот, кто поставит ладью на поле $h8$. У кого есть выигрышная стратегия?

347. Имеются а) 2; б) 3 одинаковые кучи камней. Двое играющих берут по очереди любое число камней из любой кучи, но только из одной. Выигрывает взявший последние камни. Кто выиграет при правильной игре?

348. Двое играют, передвигая короля по шахматной доске. Допускаются ходы на одно поле влево, вниз или по диагонали влево-вниз. Выигрывает тот, кто ставит короля на поле $a1$. При каких начальных положениях короля выигрывает начинающий, а при каких — его партнёр?

348.$'$ Имеются две кучи камней. Двое играющих берут по очереди камни. Разрешается взять один камень из любой кучи или по одному камню из обеих куч. Выигрывает взявший последние камни. Исследуйте эту игру.

349. Двое по очереди берут из кучи камней 1, 2 или 4 камня. Выигравшим считается взявший последние камни. При каком числе камней в куче начинающий может победить, как бы ни играл его партнёр?

350. В ряд расположены 12 клеток. На самой правой клетке стоит белая фишка, на самой левой — чёрная. Два игрока по очереди передвигают свою фишку на одно поле — вперёд или назад. (Пропустить ход нельзя.) Проигравшим считают того, у кого нет хода. Кто выигрывает: начинающий или его партнёр?

351. На доске сначала написано число 1. Каждым ходом к числу можно прибавить 3, 5 или 7. Чуня и Проня ходят по очереди так, что после любого хода Чуни получаются чётные числа, а после любого хода Прони — нечётные. Требуется, чтобы все эти нечётные числа были *простыми.*[*)] Цель Прони — назвать число, большее ста. Цель Чуни — помешать Проне. (Если первым назовёт число, большее 100, Чуня, выигравшим всё равно считается Проня.) Кто выиграет при правильной игре?

352. Двое играющих по очереди переводят часовую стрелку на 2 или 3 часа вперёд. Если в начале часовая стрелка указывает 12, а победителем объявляется тот, после чьего хода она указала на 6, узнайте, кто победит при правильной игре.[†)]

353.* Играют двое. Первый называет произвольное целое число от 2 до 9. Второй умножает это число на произвольное целое число от 2 до 9. Затем первый умножает результат на любое целое число от 2 до 9, и т. д. Выигрывает тот, кто первым получит произведение больше 1 000. Кто при правильной игре выигрывает — начинающий или его партнёр?

354. Двое по очереди ставят по одному коню на шахматную доску. Нельзя ставить фигуру под бой ранее (не важно, самим

[*)] Простое число — это натуральное число, которое имеет ровно два различных делителя: самого себя и 1. Первые двадцать простых чисел таковы: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71.

[†)] Стрелка может сделать несколько оборотов, прежде чем остановится на цифре 6.

игроком или его противником) поставленной фигуры. Кто не может сделать ход, проигрывает. Кто победит при правильной игре?

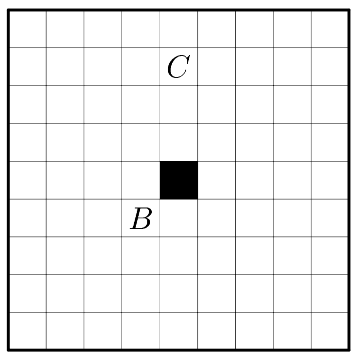
355. В строчку написано несколько минусов. Два игрока по очереди переправляют один или два соседних минуса на плюс. Выигрывает переправивший последний минус. Кто выиграет при правильной игре: начинающий или его партнёр?

356. Двое по очереди обрывают лепестки у ромашки, причём за один раз можно оборвать 1 или 2 соседних (рядом растущих) лепестка. Выигрывает тот, кто сделает последний ход. Кто выиграет при правильной игре?

357. На доске размером 7×7 двое по очереди закрашивают клетки так, чтобы они не имели общих а) сторон; б) точек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

358. На окружности даны 20 точек. Играют двое. Каждым ходом игрок проводит хорду с концами в данных точках так, чтобы хорды не пересекались внутри круга. (Иметь общие концы хорды могут.) Проигрывает тот, кто не может провести хорду. Кто победит при правильной игре?

359. Соты имеют форму квадрата 9×9. Все квадратики, кроме центрального, заполнены мёдом. В центре — дёготь. За один ход разрешается разломить соты вдоль любой вертикальной или горизонтальной линии и съесть ту часть, где нет дёгтя. Проигрывает тот, кому остался только дёготь. а) Кто выиграет при правильной игре? А если дёготь находится не в центре, а в клетке б) B; в) C?



Ребусы

Отправился логик в тёмный лес и утешал себя тем, что перед ним два выхода: либо он заблудится, либо нет. Заблудился. Ну что ж, думал он, всё равно впереди два выхода: либо провалюсь в яму, либо нет. Провалился. Падая вниз, успел подумать, что впереди всё равно два выхода: либо сверну себе шею, либо нет. Свернул. Далее он размышлял о том, что и там его ждут два выхода: либо ад, либо рай. Попал он в ад. И снова подумал, что перед ним всё ещё два выхода: либо съест его чёрт, либо нет. Съел. И вот тогда остался у него только один выход — ...

Если в арифметическом равенстве разные цифры заменить разными буквами, а одинаковые одинаковыми, то получится математический ребус. Решать его можно разными способами. Легче всего попросить компьютер перебрать все варианты. Но это бессмысленно: для того и составлены ребусы, чтобы решать их своей головой, находя способы перебирать не миллионы и не тысячи, а один-два варианта (впрочем, бывают ребусы, в которых самый быстрый способ решения — перебрать десяток вариантов).

360. Решите ребусы: а) $AX \cdot УX = 2001$; б) $\text{БАО} \cdot \text{БА} \cdot \text{Б} = 2002$.

361. Решите ребусы. (Одинаковым буквам должны соответствовать одинаковые цифры, разным — разные. Нужно найти *все* возможные варианты.)

а) $\begin{array}{r}\text{УМ}\\ +\ \text{ШУМ}\\ \hline \text{ВМШ}\end{array}$; б) $\begin{array}{r}\text{ДУРАК}\\ +\ \text{УДАР}\\ \hline \text{ДРАКА}\end{array}$; в) $\begin{array}{r}\text{УДАР}\\ +\ \text{УДАР}\\ \hline \text{ДРАКА}\end{array}$; г) $\begin{array}{r}\text{THIS}\\ +\ \text{IS}\\ \hline \text{EASY}\end{array}$;

д) $\begin{array}{r}\text{ОХОХО}\\ +\ \text{АХАХА}\\ \hline \text{АХАХАХ}\end{array}$; е) $\begin{array}{r}\text{КРОСС}\\ +\ \text{КРОСС}\\ \hline \text{СПОРТ}\end{array}$; ё) $\begin{array}{r}\text{ОДИН}\\ +\ \text{ОДИН}\\ \hline \text{МНОГО}\end{array}$; ж) $\begin{array}{r}\text{КОКА}\\ +\ \text{КОЛА}\\ \hline \text{ВОДА}\end{array}$;

з) $\begin{array}{r}\text{КОЗА}\\ +\ \text{КОЗА}\\ \hline \text{СТАДО}\end{array}$; и) $\begin{array}{r}\text{МАГНИЙ}\\ +\ \text{ТАНТАЛ}\\ \hline \text{МЕТАЛЛЫ}\end{array}$; й) $\begin{array}{r}\text{ПОДАЙ}\\ -\ \text{ВОДЫ}\\ \hline \text{ПАША}\end{array}$; к) $\begin{array}{r}\text{БАЛЕТ}\\ +\ \text{БАЛЕТ}\\ \hline \text{ТЕАТР}\end{array}$;

л) $\begin{array}{r}\text{РЮМКА}\\ +\ \text{РЮМКА}\\ \hline \text{АВАРИЯ}\end{array}$; м) $\begin{array}{r}\text{АНДРЕЙ}\\ +\ \text{ЖАННА}\\ \hline \text{ДРУЖБА}\end{array}$; н) $\begin{array}{r}\text{БАРБОС}\\ +\ \text{БОБИК}\\ \hline \text{СОБАКИ}\end{array}$; о) $\begin{array}{r}\text{РЕШИ}\\ +\ \text{ЕСЛИ}\\ \hline \text{СИЛЕН}\end{array}$;

п) $\begin{array}{r}\text{ДРАМА}\\ +\ \text{ДРАМА}\\ \hline \text{ТЕАТР}\end{array}$; р) $\begin{array}{r}\text{КАФТАН}\\ +\ \text{КАФТАН}\\ \hline \text{ТРИШКА}\end{array}$; с) $\begin{array}{r}\text{СУК}\\ \times\ \text{СУК}\\ \hline \text{БАРСУК}\end{array}$; т) $\begin{array}{r}\text{ЛИК}\\ \times\ \text{ЛИК}\\ \hline \text{БУБЛИК}\end{array}$;

у) $\begin{array}{r}\text{А}\\ +\ \text{АБ}\\ \text{АБВ}\\ \hline \text{БВБ}\end{array}$; ф) $\begin{array}{r}\text{FORTY}\\ +\ \text{TEN}\\ \text{TEN}\\ \hline \text{SIXTY}\end{array}$; х) $\begin{array}{r}\text{КОШКА}\\ +\ \text{КОШКА}\\ \text{КОШКА}\\ \hline \text{СОБАКА}\end{array}$; ц) $\begin{array}{r}\text{ВАГОН}\\ +\ \text{ВАГОН}\\ \text{ВАГОН}\\ \hline \text{СОСТАВ}\end{array}$;

ч) $\begin{array}{r}\text{ДОСКА}\\ +\ \text{ДОСКА}\\ \text{ДОСКА}\\ \hline \text{ЛОДКА}\end{array}$; ш) $\begin{array}{r}\text{ЦВЕТОК}\\ +\ \text{ЦВЕТОК}\\ \text{ЦВЕТОК}\\ \hline \text{БУКЕТИК}\end{array}$; щ) $\begin{array}{r}\text{АТАКА}\\ +\ \text{УДАР}\\ \text{УДАР}\\ \hline \text{НОКАУТ}\end{array}$; ъ) $\begin{array}{r}\text{ДОМНА}\\ +\ \text{ДОМНА}\\ \text{ДОМНА}\\ \hline \text{ЗАВОД}\end{array}$;

ы) $\begin{array}{r}\text{КНИГА}\\ +\ \text{КНИГА}\\ \text{КНИГА}\\ \hline \text{НАУКА}\end{array}$; ь) $\begin{array}{r}\text{СОТНЯ}\\ +\ \text{СОТНЯ}\\ \text{СОТНЯ}\\ \hline \text{ТРИСТА}\end{array}$; э) $\begin{array}{r}\text{АРШИН}\\ +\ \text{АРШИН}\\ \text{АРШИН}\\ \hline \text{САЖЕНЬ}\end{array}$; ю) $\begin{array}{r}\text{FORTY}\\ +\ \text{TEN}\\ \text{TEN}\\ \hline \text{SIXTY}\end{array}$;

я) $\begin{array}{r}\text{EINS}\\ \text{EINS}\\ +\ \text{EINS}\\ \text{EINS}\\ \hline \text{VIER}\end{array}$; Я) $\begin{array}{r}\text{АИСТ}\\ \text{АИСТ}\\ +\ \text{АИСТ}\\ \text{АИСТ}\\ \hline \text{СТАЯ}\end{array}$; яя) $\begin{array}{r}\text{ПАРУС}\\ \text{ПАРУС}\\ +\ \text{ПАРУС}\\ \text{ПАРУС}\\ \hline \text{РЕГАТА}\end{array}$; яЯ) $\begin{array}{r}\text{EINS}\\ \text{EINS}\\ +\ \text{EINS}\\ \text{EINS}\\ \text{EINS}\\ \hline \text{FÜNF}\end{array}$.

---

362. На доске были написаны 10 последовательных натуральных чисел. Когда стёрли одно из них, то сумма девяти оставшихся оказалась равна 2002. Какие числа остались на доске?

363. Айрат выписал подряд все числа месяца:

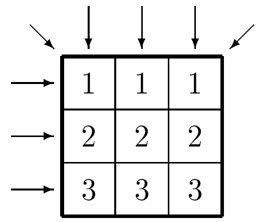
$$12345678910111213\ldots$$

и покрасил дни рождения троих своих друзей. Оказалось, что никакие два дня рождения не идут подряд и все непокрашенные промежутки состоят из одинакового количества цифр. Докажите, что первое число месяца покрашено.

Примеры и конструкции

Иди туда — не знаю куда,
принеси то — не знаю что.

364. Переставьте числа, чтобы суммы во всех указанных направлениях (по горизонталям, вертикалям и двум диагоналям) стали одинаковы.



365. а) Расставьте числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 в таблицу 3×3, чтобы суммы чисел всех указанных в предыдущей задаче направлений совпадали.

б) То же — для чисел -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4.

366. Закрасьте клетки квадрата 4×4 в 4 цвета так, чтобы одинаковые цвета не повторялись ни в строчках, ни в столбцах, ни по обеим диагоналям.

367. Закрасьте несколько клеток квадрата 4×4 так, чтобы любая закрашенная клетка имела общую сторону ровно с тремя незакрашенными, а любая незакрашенная — ровно с одной закрашенной.

367.$'$ Расставьте в клетках квадрата 4×4 знаки «$+$» и «$-$» так, чтобы для любой клетки ровно в одной клетке, соседней с ней по стороне, был противоположный знак.

368. В кабине лифта 20-этажного дома есть две кнопки. При нажатии на одну из них лифт поднимается на 13 этажей, а при нажатии на другую — опускается на 8 этажей. Как попасть с 13-го этажа на 8-й?

369. Придумайте число, которое оканчивается цифрами 17, делится на 17 и имеет сумму цифр, равную 17.

370. Придумайте а) четыре; б) тысячу натуральных чисел, сумма которых равна их произведению.

371. Существуют ли два последовательных натуральных числа*), сумма цифр каждого из которых делится на а) 11; б) 13; в)* 1018?
г)* Если натуральное число n не делится на 3, то существуют два последовательных натуральных числа, сумма цифр каждого из которых делится на n. Докажите это.

Этого не может быть, потому что
этого не может быть никогда.
А. П. Чехов. Письмо к учёному соседу

372. Номера автобусных билетов состоят из 6 цифр, начиная с билета 000 000 и кончая билетом 999 999. Билет считается счастливым, если сумма первых трёх его цифр равна сумме трёх последних. Достаточно ли купить 1000 билетов подряд, чтобы среди них наверняка нашёлся хотя бы один счастливый?

373. Придумайте 100-значное число без нулевых цифр, делящееся на сумму своих цифр.

374. Можно ли перенумеровать рёбра куба числами от 1 до 12 (каждое ребро — своим числом), чтобы сумма номеров любых трёх рёбер, сходящихся в одной вершине, делилась на 3?

374.′ Можно ли покрасить рёбра куба тремя красками, чтобы в каждой вершине сходились рёбра всех трёх цветов?

375. В начале во всех клетках таблицы 3×3 стоят нули. Можно выбрать квадрат 2×2 и увеличить на 1 все четыре его числа. Удастся ли за несколько таких операций получить изображённую на рисунке таблицу?

4	9	5
10	18	12
6	13	7

*) Имеются в виду два числа, отличающиеся на 1, например, числа 5 и 6, 1297 и 1298.

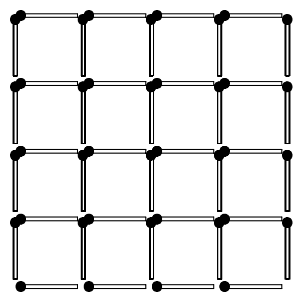
376. На плоскости проведено несколько непересекающихся отрезков, никакие два из которых не лежат на одной прямой. Всегда ли можно провести ещё несколько отрезков, соединяющих концы данных отрезков так, чтобы все отрезки вместе образовали одну несамопересекающуюся ломаную?

377.* На плоскости лежат круги радиуса, никакие два из которых не имеют общих внутренних точек. Всегда ли можно раскрасить круги в три цвета, чтобы любые два касающихся круга были разного цвета?

378.* Можно ли бесконечный лист клетчатой бумаги так разбить на доминошки 1×2, чтобы каждая прямая, идущая по линиям сетки, разрезала пополам лишь конечное число доминошек?

379. Расставьте крестики и нолики в таблице размером 5×5 так, чтобы в каждой строке, кроме, быть может, первой, крестиков было бы больше, чем ноликов, а в каждом столбце кроме, быть может, последнего, ноликов было бы больше, чем крестиков.

380.* Из 40 спичек образована квадратная решётка. Покажите, как снять 9 спичек, чтобы полностью не сохранилось контура ни одного квадрата (состоящего из одного или большего количества маленьких квадратиков). Достаточно указать один способ, как это сделать.



381.* Даны две одинаковые шестерёнки с 13 зубьями каждая. Их наложили друг на друга так, что зубья совпали (так, что проекция на плоскость выглядит как одна шестерёнка). После этого четыре пары совпадающих зубьев выпилили. Всегда ли можно повернуть эти шестерёнки друг относительно друга так, чтобы проекция на плоскость выглядела как одна целая шестерёнка (проще говоря, чтобы никакие две дырки не совпали)?

382. а) Можно ли в центры клеток шахматной доски вбить 16 гвоздей так, чтобы никакие три гвоздя не лежали на одной прямой? б) А 10 гвоздей — в центры клеток доски размером 5×5?

Предупреждение. Прямая — это не только вертикаль, диагональ или горизонталь.

383. а) Придумайте такую фигуру, которой нельзя накрыть полукруг, но двумя экземплярами которой можно накрыть круг того же радиуса. б) Может ли такая фигура быть выпуклой?

384. Придумайте систему из 4 гирь, которыми можно взвесить на чашечных весах любой целый вес от 1 до 40 г. (Гири можно класть на обе чашки весов.)

Подсказка. Гири 1 и 2 позволяют взвесить любой целый вес от 1 до 3. А гири 1 и 3 — любой вес от 1 до 4. Придумайте три гири, с помощью которых можно взвесить любой целый вес от 1 до 13. И только после этого решайте задачу о четырёх гирях.

385. Отметьте 6 точек на плоскости так, чтобы от каждой из них на расстоянии 1 находились ровно 3 точки.

386. Расположите на плоскости 7 точек так, чтобы среди любых трёх из них нашлись две на расстоянии 1.

387. Торт имеет форму прямоугольного параллелепипеда, верхняя грань которого — квадрат. Верх и бока торта равномерно покрыты глазурью. Разделите торт на 5 частей, чтобы все части содержали поровну и торта, и глазури.

388. Можно ли подобрать знаки в выражении $1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm 5 \pm 6 \pm \pm 7 \pm 8 \pm 9 \pm 10 \pm 11 \pm 12 \pm 13 \pm 14 \pm 15 \pm 16 \pm 17 \pm 18 \pm 19 \pm 20$, чтобы его значение стало равно 20?

389.* Через несколько лет после распада империи, состоявшей из 16 княжеств, оказалось, что каждое княжество дружит с тремя другими княжествами и враждует со всеми остальными. Можно ли разбить эти княжества на 8 пар дружественных княжеств?

Индукция

... выпросился остаться одну ночку; от одной ночки две ночки, от двух ночек две недели, от двух месяцев два года, а от двух годов жил тридцать лет.

390. Придумайте 10 различных натуральных чисел, сумма которых делится на каждое из них.

Указание. Сначала придумайте три числа, сумма которых делится на каждое из них. Потом подумайте, нельзя ли получить четыре таких числа, ...

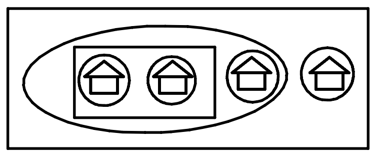
391. Делится ли число $11\ldots11$ (восемьдесят одна единица) на 81?

392. Разрежьте квадрат на а) 6; б) 7 квадратов.

в) Укажите все значения n, для которых квадрат нельзя разрезать на n меньших квадратов.

г) При каких n равносторонний треугольник нельзя разрезать на n меньших равносторонних треугольников?

393. В посёлке 100 домов. Сколько заборов, не пересекающих друг друга, можно построить, чтобы каждый забор огораживал хотя бы один дом и никакие два забора не огораживали бы одну и ту же совокупность домов?



Указание. Решите задачу сначала не для 100, а для меньших чисел: 1, 2, 3, ...

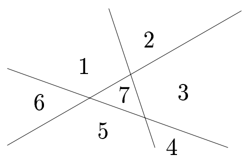
394. а) Плоскость разбита несколькими окружностями на части. Докажите, что каждую часть можно выкрасить одной из двух красок так, что любые две граничащие по дуге части будут разного цвета.

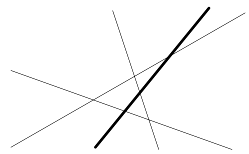
б) Докажите то же самое, если плоскость разбита на части окружностями и прямыми.

в)* На плоскости расположены несколько «треножников» (треножник состоит из трёх лучей с общей вершиной). Докажите, что если никакие два ограничивающих треножник луча не параллельны, то части, на которые они разбивают плоскость, можно выкрасить тремя красками так, чтобы части, граничащие по отрезку или лучу, оказались бы выкрашены в разный цвет.

395. В таблице из трёх строк и 1992 столбцов произвольным образом расставлены фишки: 1992 белых, 1992 красных и 1992 синих. Докажите, что можно так переставить фишки в каждой строке, чтобы в каждом столбце оказались фишки всех трёх цветов.

396. На какое наибольшее число частей могут разбить плоскость n прямых?





Указание.
Три прямые делят плоскость, самое большее, на 7 частей. Четвёртая прямая разрезает не все, а только 4 части и разбивает плоскость на 11 частей.

---

397. а) Поставьте 5 фишек на шахматную доску, чтобы любой состоящий из 9 клеток квадрат содержал в точности одну фишку. б) Сколько фишек может стоять на шахматной доске, если любой состоящий из 9 клеток квадрат содержит в точности одну фишку?

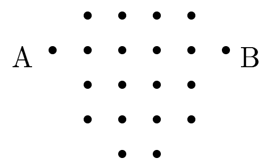
398. На доске размером 4×4 стоит «летучая ладья», которая ходит так же, как обычная ладья, но не может встать на поле, соседнее с предыдущим. Может ли она обойти всю доску, побывав на каждом поле по одному разу и вернувшись на исходное поле?

399. По кольцевой линии метро курсируют 24 поезда. Они идут в одном направлении с одинаковыми скоростями и равными интервалами. Сколько поездов надо добавить, чтобы при той же скорости уменьшить интервалы на $1/5$?

Деревья

Дурак видит не то самое дерево,
что видит умный.
Вильям Блейк[*)]

400. В доску вбито 20 гвоздиков. Расстояние между соседними равно 1 см. Натяните нитку длиной 19 см от A до B так, чтобы она прошла через все гвоздики.

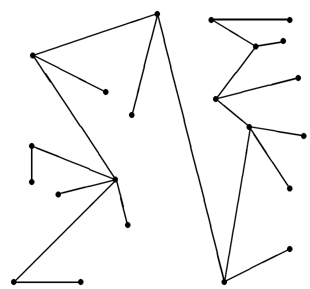


401. Сколько было брёвен, если пятьюдесятью двумя распилами из них получили 72 полена?

402. а) Имеется лист бумаги. Его можно разорвать на 5 частей. Каждый новый кусок можно разорвать на 5 частей или оставить целым, и т. д. Можно ли получить таким образом 50 кусков?

б) Если всякий раз лист можно рвать на 8 или на 12 частей, выясните, можно ли из одного листа получить 60 кусков; докажите, что любое число кусков, большее 60, получить можно.

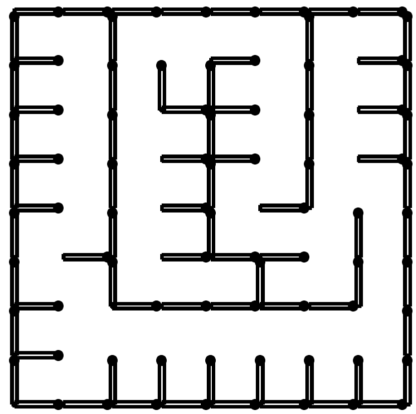
403. N точек соединены непересекающимися отрезками так, что из каждой можно пройти в каждую из остальных по отрезкам, причём единственным путём. Сколько отрезков?



404. На столе лежат две кучки: в одной 7 спичек, а в другой 8. Начинающий делит кучку на две кучки, затем второй делит одну из кучек на две, и т. д. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередного хода. Зависит ли результат этой игры от того, кто как играет, или важно лишь, кто ходит первым?

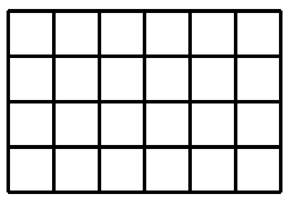
*) Вильям Блейк (1757–1827) — английский поэт и художник.

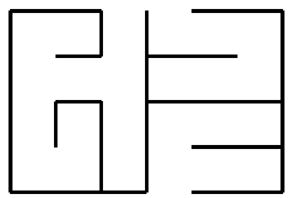
405. Вдоль границ клеток шахматной доски положили спички. Сколько спичек необходимо убрать, чтобы ладья могла добраться с любого поля на любое, не перепрыгивая через спички?



406. В землю вбили 19 колышков. Двое по очереди связывают пары колышков бечевой: каждым ходом — одну пару. Выигравшим считается игрок, при ходе которого образовалась замкнутая ломаная, составленная из бечёвок (вершинами ломаной должны быть колышки). Не разрешается связывать два уже ранее соединенных колышка. Кто выиграет при правильной игре?

407. Какое наибольшее число верёвочек, соединяющих соседние узлы сетки размера 4×6, можно разрезать, чтобы сетка не распалась на отдельные куски?





408. Всё началось с одной курицы, которая снесла два яйца. Из них вывелись цыплята: петух и курица. Когда они подросли, петуха съели сразу, а курицу — после того, как она снесла два яйца. Так делали и дальше: из яиц выводили цыплят, ели кур и петухов, ... Всё прекратилось, когда из яиц вылупились одни только петухи. Зная, что были съедены 1994 петуха, выясните, сколько съели кур.

Периодичность

Я повторяю путь земной
былых людских существований;
ничто не ново под луной,
кроме моих переживаний.
И. Губерман

409. Начнём считать пальцы на руке следующим образом: пусть 1-м будет большой, 2-м — указательный, 3-м — средний, 4-м — безымянный, 5-м — мизинец, 6-м — снова безымянный, 7-м — средний, 8-м — указательный, 9-м — большой, 10-м — указательный, и так далее. Какой палец будет 2017-м?

410. Убедитесь, что а) $1/3 = 0{,}(3)$; б) $1/6 = 0{,}1(6)$; в) $7/30 = 0{,}2(3)$; г) $7/11 = 0{,}(63)$.

411. Найдите сотую цифру после запятой в десятичной записи числа $1/7$.

412. Разделите «уголком» число 1 на а) 9; б) 99; в) 9 999.
г) Докажите общее правило: $1/\underbrace{99\ldots9}_{n} = 0{,}(\underbrace{0\ldots0}_{n-1}1)$.
д) Чисто периодическая правильная дробь равна такой обыкновенной дроби, в числителе которой — период, а в знаменателе — число $10^r - 1 = \underbrace{9\ldots9}_{r}$, где r — длина периода. Докажите это.

413. Обратите в десятичные дроби числа: а) $23/99$; б) $1234/999999$.

414. Сколько чисел, кратных 13, имеется среди первых ста чисел последовательности 1, 11, 111, 1111, … ?

415. Если число вида $11\ldots11$ кратно 7, то оно кратно и 11, и 13, и 15873. Докажите это.

416. Первую цифру k-значного числа, кратного 13, стёрли и записали позади последней цифры этого числа. При каких k полученное число кратно 13? (Например, из кратных 13 чисел 503906 и 7969 таким образом получаем числа 39065 и 9697, первое из которых кратно 13, а второе — нет.)

417. а) Решите ребус $\texttt{ПЛОМБА} \cdot 5 = \texttt{АПЛОМБ}$.

б) Найдите шестизначное число, уменьшающееся в 5 раз при переносе первой цифры в конец числа.

в) Решите ребус: $\texttt{НИКЕЛЬ} \cdot 6 = \texttt{ЕЛЬНИК}$. (*Указание.* В словах ребуса использованы два слога: НИК и ЕЛЬ. Обозначьте $\texttt{НИК} = x$ и $\texttt{ЕЛЬ} = y$.)

г) Существует ли шестизначное число, которое при умножении на 2, 3, 4, 5 и 6 даёт числа, записанные теми же цифрами, что и само число, но в другом порядке?

д) Найдите все шестизначные числа, которые увеличиваются в целое число раз при переносе последней цифры из конца в начало.

418. Какой цифрой оканчивается число $33^{77} + 77^{33}$?

419. Найдите две последние цифры числа 2^{2000}.

420. Какова последняя цифра числа $9999^{999^{99^9}}$?

421. Пятизначное число делится на 41. Докажите, что если его цифры циклически переставить, то полученное число тоже будет делиться на 41. (Например, зная, что 93 767 делится на 41, можно утверждать, что 37 679 тоже делится на 41.)

422.* а) Рассмотрим числа: 1, 11, 111, 1111, ... Докажите, что среди них найдутся два числа, разность которых делится на 196 673.

б) Докажите, что существует число, записываемое одними только единицами и кратное числу 196 673.

в) Для любого натурального числа a, не делящегося ни на 2, ни на 5, существует такое натуральное число b, что произведение ab записывается в десятичной системе счисления одними только единицами. Докажите это.

*423.** Если натуральные числа a и m взаимно просты, то существует такое натуральное n, что $a^n - 1$ делится на m. Докажите это.

---

424. Какие простые числа нельзя записать в виде суммы двух составных чисел?

Крайности

Всегда избегать крайностей —
тоже крайность.

425. В вершинах 100-угольника расставлены числа так, что каждое равно среднему арифметическому двух соседних. Докажите, что что все они равны.

426.* У каждого парламентария не более трёх врагов. Докажите, что парламент можно разбить на две палаты так, что у каждого в одной с ним палате будет не более одного врага. (Известно, что если B — враг парламентария A, то A — враг парламентария B.)

427.* Задано несколько красных и несколько синих точек. Некоторые из них соединены отрезками. Назовём точку «особой», если более половины из соединённых с ней точек имеют цвет, отличный от её цвета. Особые точки разрешается перекрашивать: на каждом шагу выбирается любая особая точка и перекрашивается в другой цвет. Докажите, что через несколько шагов не останется ни одной особой точки.

428. В клетки прямоугольной таблицы вписаны некоторые числа. Разрешено одновременно менять знак у всех чисел некоторого столбца или некоторой строки. Докажите, что этими операциями можно превратить данную таблицу в такую, у которой суммы чисел, стоящих в любом столбце или в любой строке, неотрицательны.

429*. На доске написано несколько натуральных чисел. Разрешено стирать с доски любые два различных числа и писать вместо них их наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Докажите, что когда-нибудь числа перестанут меняться, то есть из любых двух чисел одно будет делиться на другое.

430.* В круге провели несколько (конечное число) различных хорд так, что каждая из них проходит через середину какой-либо другой из проведенных хорд. Докажите, что все эти хорды являются диаметрами круга.

Комбинаторика

Отец даёт двухлетней дочери ложку и спрашивает:
— Сколько у тебя ложек?
— Одна.
Даёт другую:
— Теперь сколько?
— Две.
Даёт третью.
— Теперь сколько?
— Много.
— Нет, ты скажи.
Девочка с преувеличенным выражением брезгливости отодвигает от себя третью ложку:
— Возьми, она грязная!
К. Чуковский, «От двух до пяти»

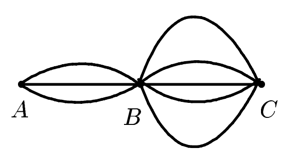
Комбинаторика — это раздел математики, в котором изучают, сколько комбинаций, подчинённых тем или иным условиям, можно составить из данных объектов. Прежде чем переходить к общим принципам, рассмотрим несколько примеров.

1) Сколько существует трёхзначных чисел?

Самое большое трёхзначное число — это 999. Самое большое двузначное — 99. Поэтому существует $999 - 99 = 900$ трёхзначных чисел.

Тот же ответ можно получить и другим способом. Вообразите, что мы пишем, цифра за цифрой, трёхзначное число. Сначала напишем любую из девяти цифр 1, 2, ... , 9 в разряд сотен. Затем любую из десяти цифр — в разряд десятков; наконец, какую-нибудь (любую) цифру — в разряд единиц. Ответ: $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$.

2) Сколько способов проехать из A в C, если система дорог такова, как показано на рисунке?

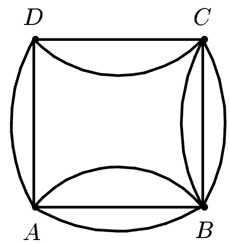


Прежде чем попасть из A в C, надо любым из трёх возможных способов попасть из A в B, а затем — любым из пяти способов из B в C. Общее количество способов равно $3 \cdot 5 = 15$.

3) Сколькими способами можно расположить на шахматной доске белую и чёрную ладьи, чтобы они не били одна другую?

Сначала поставим на любую из 64 клеток доски белую ладью. Для чёрной ладьи останется 49 полей. Ответ: $64 \cdot 49 = 3136$.

Заметьте: мы перемножаем числа 64 и 49, а не складываем их. Одна из стандартных ошибок, которую делает начинающие, состоит в том, что они путают, когда надо складывать, а когда умножать. Между тем всё просто: сумма $m+n$ есть количество элементов объединения двух непересекающихся множеств, одно из которых состоит из m, а другое из n элементов. А произведение mn — это количество пар вида $(x;y)$, где x может быть любым из m элементов некоторого множества (например, это может быть множество 64 возможных полей для белой ладьи), а y, при каждом фиксированном x, может быть любым из некоторых n элементов (например, y — одно из 49 возможных полей для чёрной ладьи).



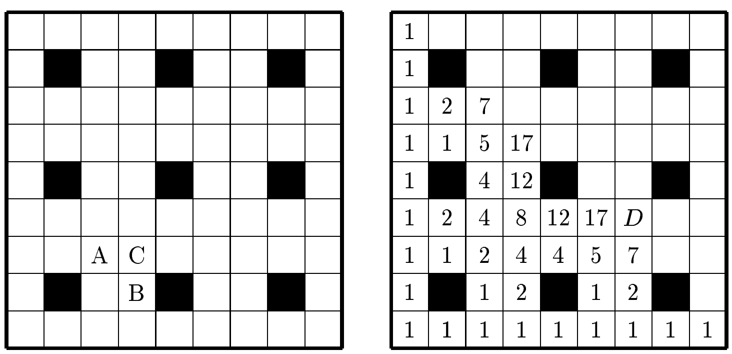
Иногда необходимо использовать и сумму, и произведение: например, количество путей, ведущих на рисунке из точки K в точку M, равно $2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 13$.

4) Сколькими способами можно выложить в ряд красный, жёлтый и зелёный шарики?

Вот все 6 способов:

к ж з	ж к з	з к ж
к з ж	ж з к	з ж к

5) Сколькими способами можно пройти из левой нижней клетки изображённого на рисунке квадрата 9×9 в правую верхнюю, ни разу не побывав ни на одной закрашенной клетке и двигаясь только вверх или вправо?



Нет ни сил, ни желания рисовать все варианты: это пример не так прост, как предыдущий! Что же делать? Давайте поставим перед собой более скромную цель: найдём количество путей из левой нижней клетки не в правую верхнюю, а, например, в клетку A. Очевидно, таких путей два. Столько же путей ведут в точку B. Теперь легко понять, что в клетку C можно пройти четырьмя способами (два из них ведут через A, а два — через B).

Таким образом, клетку за клеткой, мы можем заполнять доску, используя правило суммы: если в некоторую клетку Z можно попасть справа из клетки X и снизу — из Y, то количество способов попасть в клетку Z есть сумма количеств способов попасть в X и Y. Например, в клетку D можно попасть $17 + 7 = 24$ способами.

Так потихонечку и заполним всю доску. *Ответ:* 678.

6) Сколько слов (не обязательно осмысленных) можно получить, переставляя буквы слова МАМА*?*

МАМА, МААМ, ММАА, АМАМ, АММА и ААММ — всего 6 способов.

7) Сколько среди первых 1000 натуральных чисел таких, которые не кратны ни 2, ни 5?

Как известно, число не кратно ни 2, ни 5, если его последняя цифра — это одна из четырёх цифр 1, 3, 7, 9. Значит, в каждом десятке ровно четыре интересующих нас числа, а всего таких чисел 400.

Есть и другой способ. Рассмотрим множество $U = \{1, 2, 3, \dots, 1000\}$ и два его подмножества: $A = \{2, 4, 6, \dots, 1000\}$ и $B = \{5, 10, 15, \dots, 1000\}$. Нас интересует число элементов множества U, не принадлежащих ни A, ни B. Легко видеть, что ответ $|U| - |A| - |B|$ (где $|U|$, $|A|$ и $|B|$ — количества элементов множеств U, A и B соответственно) неправильный. Дело в том, что элементы, входящие в оба множества A и B (то есть числа, оканчивающиеся цифрой 0), были выброшены дважды, хотя следовало их выбросить только один раз. А вот правильный ответ:

$$|U| - |A| - |B| + |A \cap B|,$$

где $A \cap B$ — пересечение множеств A и B. Давайте проверим эту формулу:

$$1000 - 500 - 200 + 100 = 400.$$

8) Сколько сторон и диагоналей в выпуклом пятнадцатиугольнике?

Можно, конечно, нарисовать 15-угольник на большом листе бумаги, посчитать диагонали и прибавить к ответу 15 — число сторон. Но лучше найти общую формулу для числа сторон и диагоналей n-угольника.

Очевидно, в треугольнике 3 стороны и ни одной диагонали; в четырёхугольнике 4 стороны и 2 диагонали; в пятиугольнике 5 сторон и 5 диагоналей. Чуть сложнее увидеть, что у шестиугольника 6 сторон и 9 диагоналей.

Вообще, из каждой вершины n-угольника выходят $n-1$ отрезков (две стороны и $n-3$ диагонали). Умножив n на $(n-1)$ и не забыв разделить на 2 (ибо у каждого отрезка два конца), получим ответ: число сторон и диагоналей n-угольника равно

$$n(n-1)/2. \qquad (*)$$

В частности, у 15-угольника всего $15 \cdot 14/2 = 105$ сторон и диагоналей.

Любитель индукции может доказать формулу $(*)$ и другим способом. При $n = 3$ формула $(*)$ верна. Очевидно, $(n+1)$-угольник можно получить из n-угольника добавлением одной новой вершины. Из этой вершины выходят отрезки — стороны и диагонали — во все остальные n вершин. Значит, $(n+1)$-угольник имеет ровно на n больше сторон и диагоналей, чем n-угольник. Поскольку

$$\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n^2 - n + 2n}{2} = \frac{(n+1)n}{2},$$

мы видим, как преобразуется формула при переходе от n к $n+1$. Точнее говоря, если формула $(*)$ давала верное значение для n-угольника, то и для $(n+1)$-угольника всё будет правильно. Мы помним, что при $n = 3$ формула верна. Значит, по индукции, она верна при любом n.

Мы разобрали уже восемь разных комбинаторных задач. Пора перейти к более общим понятиям.

Перестановки. Факториал

Два элемента a и b могут быть выписаны в строчку всего двумя способами: ab и ba. Для трёх элементов, как мы знаем из четвёртого примера, существует 6 вариантов. Нетрудно посчитать и число перестановок множества из 4 элементов:

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

Всего 24 перестановки, расположенные в 4 столбца по 6 перестановок в каждом. Очевидно, перестановки на 5 элементах можно расположить в 5 столбцов, по 24 в каждом. Значит, всего существует $5 \cdot 24 = 120$ таких перестановок.

Для числа перестановок n элементов есть обозначение: $n!$ (читаем: «эн факториал»). Факториал равен произведению всех натуральных чисел от 1 до n. Например, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$. Функция $n!$ возрастает очень быстро. Так, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, ..., $10! = 3\,628\,800$. Факториалы возникают в комбинаторике очень часто. Поэтому принято считать, что если ответ выражен через факториалы, то всё сделано. (Этому в немалой степени способствует открытая в 1730 году английским математиком Дж. Стирлингом формула для приближённого вычисления:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n / e^n.$$

Относительная ошибка при пользовании этой формулой очень невелика и стремится к нулю при увеличении числа n. Что такое e и почему верна формула Стирлинга, семикласснику объяснить совершенно невозможно.)

Главное свойство факториала очевидно из определения:

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n!.$$

Подставим в эту формулу $n = 0$. Получим:

$$1! = 1 \cdot 0!,$$

откуда $0! = 1$. И действительно, во многих формулах для единообразной записи очень удобно пользоваться обозначением $0! = 1$. А вот определить $(-1)!$ никак нельзя: равенство $0! = 0 \cdot (-1)!$ невозможно ни при каком значении $(-1)!$.

Размещения

Следующее важное понятие комбинаторики — размещение. Давайте рассмотрим такую ситуацию: в классе, в котором 25 учеников, нужно выбрать старосту, его заместителя и помощника заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

Очевидно, сначала 25 способами можно выбрать любого ученика в старосты. Затем из 24 оставшихся — заместителя старосты, а после этого любой из 23 оставшихся может оказаться помощником заместителя. По правилу произведения, всего имеем

$$A_{25}^3 = 25 \cdot 24 \cdot 23$$

вариантов.

Вообще, через A_n^k (читаем: «а из эн по ка») обозначают число способов выбрать из данных n элементов сначала первый элемент, потом второй, третий, ..., k-й. Вычисляют его по формуле

$$A_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

Заметьте: в правой части ровно k множителей, и последний из них равен $n-k+1$, а вовсе не $n-k$, как могло показаться на первый взгляд. Формулу можно записать и через факториалы:

$$A_n^k = n!/(n-k)!.$$

Числа сочетаний

Представьте себе, что в классе из 25 человек нужно выбрать не старосту, его заместителя и помощника его заместителя, а тройку начальников, которые, обладая равными правами, будут управлять и судить класс, не выясняя, кто из троих главный, кто менее главный, а кто так себе. Тогда способов будет не A_{25}^3, а в 6 раз меньше. (Подумайте об этом хорошенько! Здесь $6 = 3!$ — количество способов ранжировать трёх начальников, то есть количество всех перестановок на множестве из 3 элементов.)

Вообще, очень важные для комбинаторики и теории вероятностей числа сочетаний C_n^k (читаем: «число сочетаний из эн по ка» или «це из эн по ка») можно вычислить по формуле

$$C_n^k = A_n^k/k! = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

К сожалению, ни для точного определения, ни для свойств чисел сочетаний в этой брошюре места не нашлось. Но для первого знакомства с комбинаторикой сказанного и так предостаточно. Вернёмся лучше к нашим обычным задачам, оставив теорию на будущее.

431. В киоске продают 5 видов конвертов и 4 вида марок. Сколькими способами можно купить конверт и марку?

432. В футбольной команде (11 человек) нужно выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Капитаном может стать любой из 11 футболистов. После выбора капитана на роль его заместителя могут претендовать 10 оставшихся человек. Таким образом, есть $11 \cdot 10 = 110$ разных вариантов выбора.

Эта задача отличается от предыдущей тем, что выбор капитана ограничивает круг претендентов на роль заместителя: капитан не может быть своим заместителем. Таким образом, выборы капитана и его заместителя не являются независимыми — такими, как выборы конверта и марки.

433. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова конверт?

Пояснение. Гласную можно выбрать двумя способами (о или е), а согласную — пятью способами (к, н, в, р или т).

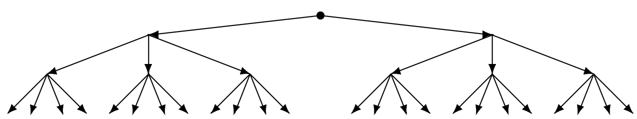
434. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белую и чёрную ладьи так, чтобы они не били друг друга?

435. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белого и чёрного короля, чтобы получилась допустимая правилами игры позиция?

436. Ранним утром на рыбалку улыбающийся Игорь мчался босиком. Сколько осмысленных предложений можно составить, вычёркивая некоторые слова этого предложения? (Во все предложения обязательно должны входить подлежащее Игорь и сказуемое мчался.)

437. Начальник транспортного цеха пригласил несколько человек на совещание. Каждый участник совещания, входя в кабинет, пожимал руки всем присутствующим. Сколько человек участвовали в совещании, если было всего 78 рукопожатий?

438. Крыса бежит по лабиринту, который устроен так, что сначала она должна выбрать одну из двух дверей, затем одну из трёх дверей, а за каждой из них её ожидают четыре двери. Пройдя дверь, крыса не может вернуться через неё обратно. Сколькими различными путями крыса может пройти лабиринт от начала до конца?



439. В поход ходили 80% учеников класса, а на экскурсии было 60% класса, причём каждый был в походе или на экскурсии. Сколько процентов класса были и там, и там?

440. В классе 35 учеников. 20 из них занимаются в математическом кружке, 11 — в биологическом, а 10 ничем не занимаются. Сколько ребят занимаются и математикой, и биологией?

441. На дискотеке 80% времени был выключен свет, 90% времени играла музыка и 50% времени шёл дождь. Какую наименьшую

долю времени всё это обязано было происходить одновременно?

442. Из 100 человек 85 знают английский язык, 80 — испанский, 75 — немецкий. Сколько человек заведомо знают все три языка?

Наводящий вопрос. Сколько человек не знают английский язык? испанский? немецкий?

443. Каких натуральных чисел от 1 до 1993 больше: тех, которые кратны 8, но не кратны 9, или тех, которые кратны 9, но не кратны 8?

444. Сколько существует натуральных чисел, меньших 1 000, которые не кратны ни 2, ни 5? А не кратных ни 2, ни 3, ни 5?

445. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна чётная цифра?

Подсказка. Вместо того, чтобы подсчитывать количество требуемых шестизначных чисел, определите количество шестизначных чисел, у которых все цифры нечётны.

446. Каких чисел больше среди первого миллиона: тех, в записи которых есть цифра 7, или тех, в записи которых её нет?

447. Сколько семизначных чисел не содержат цифры 2?

448. Сколькими способами 8 человек могут встать в очередь к театральной кассе?

449. Сколько существует 9-значных чисел, цифры которых расположены в порядке убывания (то есть каждая следующая меньше предыдущей)?

450. Сколько разных чисел можно получить, переставляя цифры чисел: а) 133; б) 9 854; в) 3 213; г) 98 561; д) 32 123?

451. Сколько различных (не обязательно осмысленных) слов можно получить, переставляя буквы слов: а) крот; б) математика; в) наполеононенавистничество?

452. Сколько существует трёхзначных чисел, в запись которых входит ровно одна цифра 5?

ПАРАДОКСЫ и СОФИЗМЫ*)

Рефлексия

Сознание — это зажжённые фары
впереди идущего паровоза.
Обратите их светом внутрь, и
случится катастрофа.
Б. Пастернак

Все слышали нескончаемую историю о священнике и собаке. Это стихотворение интересно тем, что оно снова и снова возвращается к самому себе, подобно змее, заглатывающей собственный хвост.

У попа была собака,
Он её любил,
Она съела кусок мяса,
Он её убил.
В землю закопал, а
На могиле написал:
"У попа была собака, ... "

Следующая фраза — типичный пример предложения, говорящего о себе самом. Пересчитайте буквы, и Вы убедитесь, что это — чистая правда:

- В этой фразе двадцать восемь букв.

Вот другие примеры:

- Вы только что начали читать предложение, чтение которого Вы уже заканчиваете.

---

*) «Софизм» и «парадокс» — слова греческие. «Софизм» ($\sigma o\varphi\iota\sigma\mu\alpha$) означает рассуждение, формально кажущееся совершенно безупречным, но содержащее на самом деле ошибку, в результате чего конечный вывод оказывается абсурдным. Одним из наиболее известных софизмов является следующий: «То, что ты не терял, ты имеешь; ты не терял рогов, следовательно, ты их имеешь.»

В парадоксе ($\pi\alpha\rho\alpha\delta o\xi o\zeta$), наоборот, умозаключение, кажущееся неверным, противоречащим «здравому смыслу», на самом деле справедливо.

- В этой фразе два раза встречается слово «в», два раза встречается слово «этой», два раза встречается слово «фразе», четырнадцать раз встречается слово «встречается», четырнадцать раз встречается слово «слово», шесть раз встречается слово «раз», девять раз встречается слово «раза», семь раз встречается слово «два», три раза встречается слово «четырнадцать», три раза встречается слово «три», два раза встречается слово «девять», два раза встречается слово «семь», два раза встречается слово «шесть».

- Only the fool would take trouble to verify that his sentence was composed of ten a's, three b's, four d's, forty-six e's, sixteen f's, four g's, thirteen h's, fifteen i's, two k's, nine l's, four m's, twenty-five n's, twenty-four o's, five p's, sixteen r's, forty-one s's, thirty-seven t's, ten u's, eight v's, eight w's, four x's, eleven y's, twenty-seven commas, twenty-three apostrophes, seven hyphens, and, last but not least, a single !

- In this sentence, the word *and* occurs twice, the word *eight* occurs twice, the word *four* occurs twice, the word *fourteen* occurs four times, the word *in* occurs twice, the word *occurs* occurs fourteen times, the word *sentence* occurs twice, the word *seven* occurs twice, the word *the* occurs fourteen times, the word *this* occurs twice, the word *times* occurs seven times, the word *twice* occurs eight times and the word *word* occurs fourteen times.

- Это предложение содержит двенадцать слов, двадцать шесть слогов и семьдесят три буквы.

- Когда за этим предложением не наблюдают, оно написано по-немецки.

- .иксбара-оп тюатич, овелан аварпс, кат оннемИ

- Девять слов назад это предложение ещё не началось.

- Это предложение состояло бы из десяти слов, если бы оно было на пять слов короче.

- Если бы это предложение не существовало, кто-нибудь придумал бы его.

- Если бы я дописал это предложение,

- Определение. Душевнобольным называется душевнобольной, вступивший в конфликт с обществом. *(Из учебника психиатрии.)*

- Как выглядело бы это предложение, если бы π равнялось 3?[*)]

- Где бы Вы ни встретили это предложение, уничтожьте его.

- Этот принцип настолько всеобъемлющ, что никакое частное его применение невозможно.

- То, что я Вам сейчас предсказываю, сбудется.

- Вы меня помните? Я — тот самый человек, который не произвёл на Вас никакого впечатления.

- Почему все неприятности происходят в самое неподходящее время?

- Не напоминает ли это предложение о Пушкине?

- Представьте, что на последней, 500-й странице книги напечатано:

[*)] Заметьте, в мире, где π *действительно* равно 3, Вы сказали бы не «если бы $\pi = 3$», а «если бы $\pi = 2$» или «если бы $\pi \neq 3$». Впрочем, изменить π — значит глубочайшим образом изменить и всю математику, и весь мир. Пожалуй, ни понятие «предложение», ни «3» не выдержали бы такого потрясения.

Опечатки

с. 500: Вместо «Опечатки» следует читать «Опечатка».

- *(Случай на экзамене.)* Билет включал в себя следующее: *"Напишите вопрос, подходящий для выпускного экзамена по этому курсу, а затем ответьте на него."*

  Для ответа достаточно дважды переписать этот вопрос!

- К переводу своей статьи Литлвуд написал примечания:

  Я весьма благодарен профессору Риссу за перевод этой статьи.
  Я также благодарю профессора Рисса за перевод последнего предложения.
  Я также благодарю профессора Рисса за перевод последнего предложения.

  Почему этот ряд благодарностей не нужно продолжать?

Самоотрицание

Плюрализм нужен нашей стране как воздух, и двух мнений об этом быть не может.

М. С. Горбачёв[*)]

- Лозунг *Короче!* сам следует тому, к чему призывает. А вот приказ *Не сметь командовать!* противоречит сам себе.

- Самозванцев нам не надо: командиром буду я.

[*)] Генеральный секретать ЦК КПСС, почти сумевший уничтожить коммунизм.

- Вообразите майку с надписью *На этой майке ничего не написано.*?!

- Не противоречит ли само себе правило *Нет правил без исключения.*?

- Не слушайся меня!

- Здес рровно три*) ошибки.

- Как перевести на русский язык предложение "It's difficult to translate this English sentence into Russian"†)?

  Наверно, так:"Это предложение трудно перевести с русского на английский."

- Я вынужден был перевести это предложение на русский язык, поскольку не сумел прочитать его в оригинале — на санскрите.

Парадокс лжеца

Не зря ли знаньем бесполезным
свой дух дремотный мы тревожим?
В тех, кто заглядывает в бездну,
она заглядывает тоже.

И. Губерман

- Ещё в Древней Греции знали «парадокс лжеца». Представьте себе, что некто говорит: *«Я лгу.»* Или представьте, что Вы читаете в книге:

  То, что здесь написано, — неправда.‡)

*) Слово «три» — ошибка или нет?

†) Дословный перевод: "Трудно перевести это английское предложение на русский язык."

‡) Так что же тут написано? Если правда, то тогда — это неправда; а если неправда — то это правда!

- В одном полку брадобрею приказали брить всех тех, кто не бреется сам. Должен ли брадобрей брить сам себя?

- Может ли Всемогущий Бог создать камень, который он сам поднять не сможет?

- Что произойдёт, если всесокрушающее пушечное ядро попадёт в несокрушимую броню?

- Каждое натуральное число можно назвать, произнеся несколько слов. Например, число 2 задаётся одним словом, а число 22 — двумя.

  Давайте рассмотрим *наименьшее число, которое нельзя задать меньше чем десятью словами.* Его описание состоит всего из 9 слов, что противоречит его основному свойству.

Софизмы

- Если равны половины, то равны и целые. Полупустой стакан равен полуполному; следовательно, пустой стакан равен полному.

- Рассмотрим равенство $1 = \dfrac{2}{3-1}$. Если единицу в знаменателе заменим на $\dfrac{2}{3-1}$, то получим:

$$1 = \frac{2}{3 - \dfrac{2}{3-1}}.$$

Повторив эту операцию по отношению к новой единице, стоящей в знаменателе, и поступая далее подобным образом, мы построим бесконечную цепную дробь:

$$1 = \cfrac{2}{3 - \cfrac{2}{3 - \cfrac{2}{3 - \cfrac{2}{3 - \ldots}}}}.$$

С другой стороны, $2 = \frac{2}{3-2}$, так что

$$2 = \frac{2}{3-2} = \cfrac{2}{3 - \cfrac{2}{3-2}} = \cfrac{2}{3 - \cfrac{2}{3 - \cfrac{2}{3 - \cfrac{2}{3 - \ldots}}}}.$$

Построенные дроби равны! Значит, равны и числа, из которых они получены, то есть $1 = 2$. Сильный и очень важный результат, который многие учителя скрывают от своих учеников!

- Обозначим

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \ldots$$

Очевидно,

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \ldots \qquad (*)$$

Вычитая это равенство из предыдущего, получаем:

$$S - \frac{S}{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \ldots \qquad (**)$$

Поскольку $\frac{1}{2} < 1$, $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$, $\frac{1}{6} < \frac{1}{5}$, $\frac{1}{8} < \frac{1}{7}$, и вообще, $\frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1}$, то каждое слагаемое правой части формулы $(*)$ меньше соответствующего слагаемого формулы $(**)$. Следовательно,

$$\frac{S}{2} < S - \frac{S}{2},$$

что удивительно.

Потешные истории

Я спорю искренне и честно,
я чистой истины посредник,
и мне совсем не интересно,
что говорит мой собеседник.
И. Губерман

- Крестьянин шёл по дороге со своим сыном. Сын рассказывал что-то отцу и сказал ему неправду. Крестьянин догадался, что сын обманывает его. Тогда он сказал: “Сейчас, сынок, мы подходим к мосту. Этот мост не простой, а волшебный — он проваливается под теми, кто говорит неправду.” Когда сын услышал это, он испугался и признался отцу, что обманул его. Хотите узнать, что было дальше? А дальше крестьянин со своим сыном вступили на мост, и мост провалился под крестьянином — *ведь никаких волшебных мостов на самом деле не бывает.*

- *(Юридический казус.)* Встретились в пустыне три путника. Двое, не сговариваясь, решили убить третьего. Ночью один из них отравил его воду, а другой (не зная о том!), проколол бурдюк с водой так, что вода вскорости вытекла и бедняга погиб от жажды.

  Кто убийца? В суде второй утверждал, что благодаря нему третий прожил даже дольше, чем если бы он выпил отраву. А отравитель оправдывался тем, что весь яд вытек и никак не повредил жертве.

- При строительстве моста через Неву несколько тысяч человек были заняты бойкою свай, что, не говоря уже о расходах, чрезвычайно замедляло работы. Искусный строитель генерал Корбец выдумал машину, значительно облегчившую и ускорившую этот труд. Сделав опыты, описание машины он представил Главноуправляющему путей сообщения и получил на бумаге официальный и строжайший *выговор:* зачем он этой машины прежде не изобрёл и тем ввёл казну в огромные и напрасные расходы.

- Начальник зырянского узла связи Ляпунов пожаловался в милицию: “Джемилев нарушает правила ведения междугородных разговоров … Он утверждает, что мы подслушиваем его переговоры. Прошу разъяснить Джемилеву, что его действия носят оскорбительный характер, а подобные утверждения являются клеветой.” В обоснование своей жалобы Ляпунов прилагает докладную телефонистки Пенягиной с изложением содержания разговора Джемилева. («Хроника текущих событий», 1980 г.)

Тест по арифметике

В наши дни портреты пишут за семь минут, рисовать обучают за три дня, английский язык втолковывают за сорок уроков, восемь языков одновременно преподают с помощью нескольких гравюр, где изображены различные предметы и названия их на этих восьми языках. Словом, если бы можно было собрать воедино все наслаждения, чувства и мысли, на которые пока что уходит целая жизнь, и вместить их в одни сутки, сделали бы, вероятно, и это. Вам сунули бы в рот пилюлю и объявили: "Глотайте и проваливайте!"

Шамфор (1740–1794) «Мысли и максимы»

453. Огурцы содержали 99% воды. Часть её испарилась, так что в огурцах стало 98% воды. Какую часть веса потеряли огурцы?

454. В одной урне лежали два белых шара, в другой — два чёрных, в третьей — один белый и один чёрный. На каждой урне висела табличка, указывавшая её содержимое:

$\boxed{\text{ББ}}$ $\boxed{\text{ЧЧ}}$ $\boxed{\text{БЧ}}$

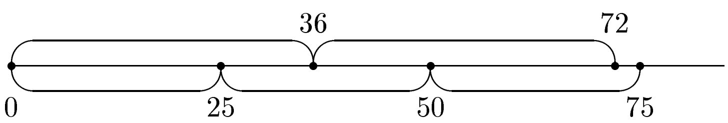
Шутник перевесил таблички так, что теперь все надписи неверны. Можно ли, вынув один шар, определить, что где находится?

455. В стране три города: Правдин, Лгунов и Переменск. Жители Правдина всегда говорят правду, Лгунова — лгут, а жители Переменска строго попеременно лгут и говорят правду. Пожарным позвонили:

— У нас пожар!
— Где горит?
— В Переменске.

Куда ехать пожарным? (Подразумевается, что пожар действительно случился и куда-нибудь ехать пожарные должны.)

456. Один мастер ставит на длинной ленте метки от её начала через каждые 36 см, другой — через 25 см. Могут ли две метки оказаться на расстоянии 1 см друг от друга?



457. Поезд проходит*) мост длиной 450 метров за минуту и полминуты идёт мимо телеграфного столба. Найдите длину и скорость поезда.

458. Как контейнерами веса 130 кг и 160 кг полностью загрузить грузовик грузоподъёмностью 3 тонны?

459. Ученику на контрольной дали 20 задач. За каждую верно решённую задачу ему ставят 8 баллов, за каждую неверно решённую — минус 5 баллов, за задачу, которую он не брался решать,— 0 баллов. Ученик получил в сумме 13 баллов. Сколько задач он пытался решить?

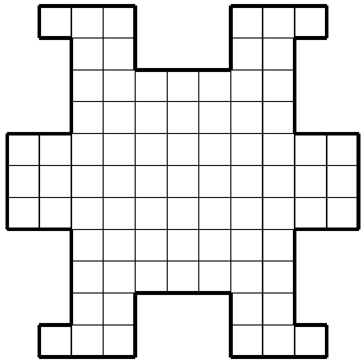
460. Олимпиада, Сосипатра и Поликсена пили чай. Если бы Олимпиада выпила на 5 чашек больше, то она выпила бы столько, сколько две другие вместе. Если бы Сосипатра выпила на 9 чашек больше, то она выпила бы столько, сколько две другие вместе. Сколько каждая выпила чашек и у кого какое отчество, если Карповна выпила 11 чашек, Уваровна пила вприкуску, а количество выпитых Титовной чашек кратно трём?

461. Бактерии размножаются делением пополам со скоростью 1 деление в минуту. Если посадить в сосуд с питательной смесью 1 бактерию, то через час он заполнится бактериями. Через какое время была заполнена половина сосуда? А через какое время заполнился бы сосуд, если бы в начале в нём было две бактерии?

---

*) Считая с момента, когда поезд начал въезжать на мост, до момента, когда он целиком съехал с него.

462. Разрежьте фигуру на 9 равных (и по форме, и по площади) частей.



463. Каждый зритель, пришедший на спектакль «Королевский жираф», принёс с собой либо одну дохлую кошку, либо два кочана гнилой капусты, либо три тухлых яйца. Стоявший у входа Гекльберри Финн подсчитал, что кошек было 64 штуки. После спектакля оба артиста — король и герцог — были с ног до головы закиданы припасами, причём на долю каждого досталось поровну предметов (а промахов жители Арканзаса не делают). Правда, король принял на себя лишь пятую часть всех яиц и седьмую часть капусты, но все дохлые кошки полетели именно в него. Сколько зрителей пришло на представление?

464. От потолка комнаты вертикально вниз по стене поползли два паука. Спустившись до пола, они поползли обратно. Первый паук полз всё время с постоянной скоростью, а второй хотя и поднимался вдвое медленнее первого, но зато спускался вдвое быстрее первого. Какой паук раньше приполз обратно?

465.* Расположите на плоскости 11 одинаковых квадратов, чтобы они не налегали друг на друга и выполнялось условие: как бы ни раскрасить квадраты в три цвета — обязательно найдутся два квадрата одного цвета, имеющие общий отрезок границы, то есть прилегающие друг к другу частью стороны (не точкой!).

466. Замените буквы в слове ТРАНСПОРТИРОВКА цифрами (разные буквы — разными цифрами, одинаковые — одинаковыми) так, чтобы выполнялись неравенства

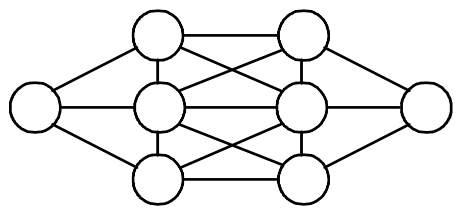
$$\mathrm{Т} > \mathrm{Р} > \mathrm{А} > \mathrm{Н} < \mathrm{С} < \mathrm{П} < \mathrm{О} < \mathrm{Р} < \mathrm{Т} > \mathrm{И} > \mathrm{Р} > \mathrm{О} < \mathrm{В} < \mathrm{К} < \mathrm{А}.$$

467. В каждой клетке доски 4×4 лежит слива. Уберите 6 слив так, чтобы в каждом горизонтальном и в каждом вертикальном ряду осталось чётное число слив.

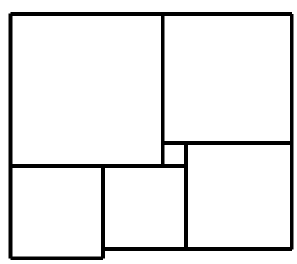
468. а) На доске размером 6×6 расставьте 8 ферзей так, чтобы каждый из них бил ровно одного ферзя.
б) Можно ли так расставить 9 ферзей?

469. В трамвае ехали 60 человек: контролёры, кондукторы, лжекондукторы (граждане, выдававшие себя за кондукторов), лжеконтролёры (граждане, выдававшие себя за контролеров), и, возможно, обычные пассажиры. Общее количество лжеконтролёров и лжекондукторов в 4 раза меньше числа настоящих кондукторов и контролёров. Общее число контролёров и лжеконтролёров в 7 раз больше общего числа кондукторов и лжекондукторов. Сколько в трамвае обычных пассажиров?

470. Расставьте в кружочках числа 1, 2, 3, … , 8, чтобы ни в каких двух соединённых отрезком кружочках не оказались бы соседние (то есть отличающиеся на 1) натуральные числа.



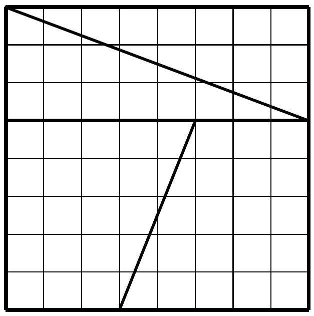
471. Фигура на рисунке составлена из квадратов. Найдите сторону левого нижнего, если сторона самого маленького равна 1.

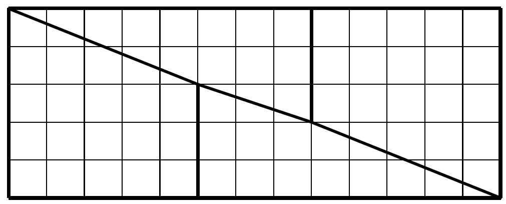


472. а) Конь вышел с некоторого поля шахматной доски и через несколько ходов вернулся на него. Докажите, что он сделал чётное число ходов.
б) Из шахматной доски выпилено угловое поле. Может ли конь обойти все оставшиеся поля по одному разу и вернуться на исходное поле?

в) Может ли конь пройти из левого нижнего угла шахматной доски в правый верхний, побывав на каждом поле ровно один раз?

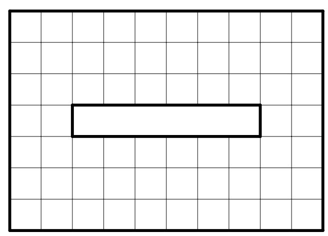
473. Доску размером 8×8 разрезали на четыре части и сложили из них прямоугольник размером 5×13. Откуда появилась лишняя клетка?





474. Пять братьев делили наследство отца поровну. В наследстве было три дома. Поскольку дома пилить нельзя, их взяли три старших брата, а меньшим выделили деньги: каждый из трёх старших братьев заплатил по 800 рублей, а меньшие братья разделили эти деньги между собой. Сколько стоил один дом?

475. Из прямоугольника размером 10×7 вырезали прямоугольник 1×6, как показано на рисунке. Разрежьте полученную фигуру на две равные части, из которых можно сложить квадрат.

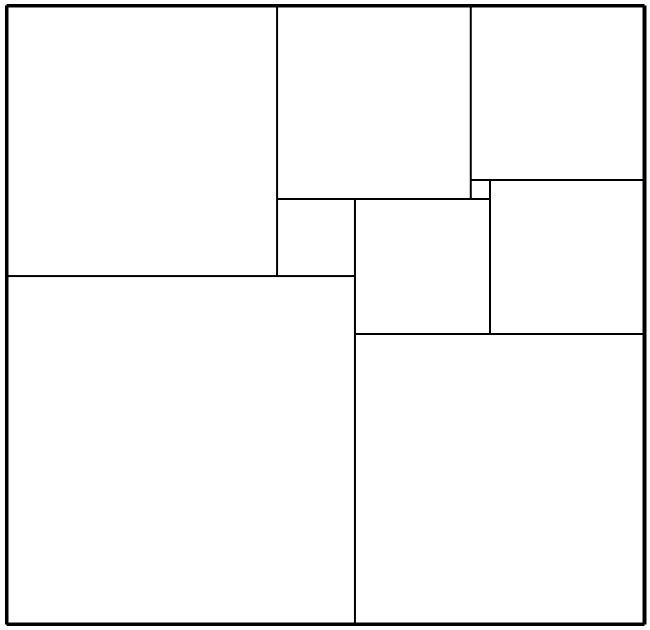


476. Известно, что a и b — натуральные числа, а из следующих четырёх утверждений —

1) $a+1$ делится на b, 2) $a=2b+5$,
3) $a+b$ делится на 3, 4) $a+7b$ — простое число

— три верных, а одно неверное. Найдите все возможные пары чисел a, b.

477. Нарисуйте на клетчатой бумаге прямоугольник шириной 33 и высотой 32 клетки и разрежьте его на квадраты, как показано на рисунке. (Резать можно только вдоль линий сетки!)



Разбиение прямоугольника на *разные* квадраты

478. Если от некоторого двузначного числа отнять 2, то результат разделится нацело на 3, а если отнять не 2, а 3, то разделится не на 3, а на 2. Если к этому числу прибавить 4, то результат разделится нацело на 5, а если от него отнять 5, то разделится на 4. Более того, если от этого числа отнять 5, то разделится нацело на 6, а если же от нашего числа отнять 6, то разделится на 5. И это ещё не всё: если к этому замечательному числу прибавить 7, то результат разделится на 8, а если прибавить 8, то разделится на 7. Что же это за число?

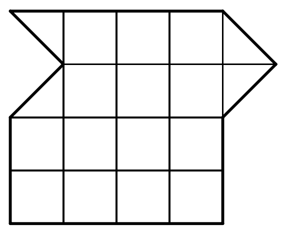
479. а) Когда комиссия приехала в больницу, там находились 3 врача и 1996 пациентов. Комиссия попросила каждого указать двух врачей. Каждый врач назвал двух других врачей, а паци-

енты называли кого угодно. Докажите, что комиссия смогла выявить хотя бы одного пациента.

б) В Конторе работают 200 психически здоровых и 1999 сумасшедших сотрудников. Однажды каждый сотрудник написал докладную записку, в которой перечислил 1999 своих коллег, по его мнению, сумасшедших. Каждый психически здоровый сотрудник верно указал всех сумасшедших, а каждый сумасшедший мог указать на кого угодно, кроме себя. Докажите, что на основании этих данных можно выявить по крайней мере 199 сумасшедших.

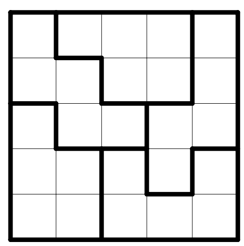
480. В одной из трёх комнат сидит принцесса, в другой — тигр, а в третьей нет никого. На двери левой комнаты написано: “Тигр в правой комнате”, на двери средней: “Левая комната пуста”, на двери правой: “Принцесса в средней комнате”. Известно, что надпись на двери комнаты, где сидит принцесса, истинна, надпись на двери комнаты, где сидит тигр — ложна, а надпись на двери пустой комнаты может быть как истинной, так и ложной. Где сидит принцесса, а где — тигр?

481. Разрежьте изображённую на рисунке фигуру на а) четыре; б) пять одинаковых частей. (Можно резать не только по сторонам и диагоналям клеток.)



482. Представьте число 203 в виде суммы нескольких натуральных чисел, произведение которых тоже равно 203.

483. Покрасьте клетки доски 5×5 в пять цветов так, чтобы в каждом горизонтальном ряду, в каждом вертикальном ряду и в каждом выделенном блоке все цвета встречались бы по одному разу.



484. Какое четырёхзначное число в 83 раза больше своей суммы цифр?

485. Числа 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 и 512 расставьте в клетках таблицы 3×3 так, чтобы произведения по всем вертикалям, горизонталям и обеим главным диагоналям были равны.

486. В одной куче 18 конфет, в другой — 23. Двое по очереди съедают одну из куч, а другую делят на две кучи. Кто не может поделить (если в куче одна конфета), проигрывает. Есть ли у начинающего выигрышная стратегия?

487. Поля клетчатой доски размером 8×8 будем по очереди закрашивать в красный цвет так, чтобы после окраски каждой очередной клетки фигура, состоящая из закрашенных клеток, имела ось симметрии. Покажите, как можно закрасить 28 клеток, соблюдая это условие. (В качестве ответа расставьте на тех клетках, которые должны быть закрашены, числа от 1 до 28 в том порядке, в котором проводилось закрашивание.)

488. По кругу стоят 20 корзин. Можно ли разложить в них 99 арбузов, чтобы количества арбузов в любых двух соседних корзинах отличались ровно на 1?

489. В турнире участвуют 15 шахматистов. Может ли быть, что к некоторому моменту каждый из них сыграл ровно 7 партий?

490. Куб стоит на одной вершине и освещён прямо сверху. Какова тень?

491. Сколько сторон может иметь сечение куба плоскостью?

Указание. Можно экспериментировать на картошке, вырезая из неё кубик и рассекая его.

492. Среди любых ли 10 отрезков найдутся 3, из которых можно составить треугольник?

493. В строке 20 целых чисел. Сумма любых трёх последовательно стоящих чисел положительна. Может ли сумма всех 20 чисел быть отрицательна?

494. Земной шар по экватору плотно обтянули верёвкой. Её длину увеличили на 1 метр. Образовавшийся зазор равномерно распределили по экватору. Сможет ли в него прошмыгнуть мышь?

495. По олимпийской системе (проигравший выбывает) соревнуются 50 боксёров. Сколько боёв надо провести для выявления победителя?

495! Плитка шоколада состоит из отдельных долек, образующих 4 вертикальных ряда и 6 горизонтальных. За какое наименьшее число разломов её можно разломать на отдельные дольки, если всякий раз ломать разрешается лишь 1 кусок?

496. Первый разбойник взял 100 рублей и десятую часть оставшейся добычи, второй взял 200 рублей и десятую часть остатка, третий — 300 рублей и десятую часть остатка, и так далее. Оказалось, что добычу поделили поровну. Сколько разбойников и какова добыча?

497. Сумма нескольких чисел равна 1. Может ли сумма их квадратов быть а) меньше 0,1; б) больше 1101?

498. Поместите в квадрат 1×1 несколько непересекающихся кругов, сумма радиусов которых больше 1101.

499. Ско́лькими способами можно расставить 8 не отличимых друг от друга ладей на шахматной доске, чтобы они не били друг друга?

500. Как быстрее: проехать пароходом по реке туда и обратно или по озеру то же расстояние туда и обратно?*)

501. Пароход шёл от Нижнего Новгорода до Астрахани 5 суток, а обратно — 7 суток. Сколько времени плывут плоты от Нижнего Новгорода до Астрахани?

502. В пруд пустили 30 щук, которые кушали друг друга. Щука считается сытой, если она съела трёх щук (сытых или голодных). Каково наибольшее число щук, которые могут насытиться? †)

*) *Подсказка.* Если скорость парохода равна скорости течения реки, ...

†) Съеденная сытая щука учитывается при подсчёте числа сытых щук!

503. Справа написаны некоторые числительные языка иаи, на котором говорят на острове Луайоте в Меланезии. Каждое числительное больше предыдущего на 2 (т. е. либо все чётные, либо нечётные, например: 1, 3, 5, 7 и т. д. или 28, 30, 32 и т. д.). Определите значения этих числительных и напишите по своему усмотрению несколько числительных языка иаи с их значениями.

thabung ke nua lo

thabung ke nua vak

libenyita ke nua khasa

libenyita ke nua kun

libenyita ke nua thabung

libenyita ke nua thabung ke nua lo

libenyita ke nua thabung ke nua vak

504. Найдите такие точки на земном шаре, что если пройти 10 км на юг, 10 км на восток и 10 км на север, то вернёмся в исходную точку.

Предупреждение. Конечно, если мы выйдем из точки, удалённой от Южного полюса на 10 км, то сначала придём на полюс, потом 10 км протопчемся на месте, а затем пройдём 10 км, возвращаясь в начало маршрута. Но можно ли считать, что наше топтание на месте было направлено на восток? Ведь, находясь на Южном полюсе, на запад мы двигались бы точно так же — стоя на месте! Постарайтесь найти другое решение задачи, для чего сначала упростите её — представьте, что путешественник прошёл 10 км на восток и оказался там же, откуда вышел. Когда это возможно?

505. У царя Гвидона было 5 сыновей. Из остальных его потомков 15 имели по три сына (и ни одной дочери), а остальные умерли бездетными. Сколько всего было потомков у Гвидона?

506. Можно ли увезти из каменоломни 50 камней, массы которых 370 кг, 372 кг, 374 кг, ... , 468 кг, на 7 трёхтонках?

507. Несколько ящиков вместе весят 10 тонн, причём каждый весит не больше 1 тонны. Сколько трёхтонок заведомо достаточно, чтобы увезти весь груз?

508. На доске были написаны четыре числа. Их сложили всевозможными способами по два и получили следующие суммы: 2, 4, 9, 9, 14, 16. Какие числа были на доске?

509. Класс построен в виде прямоугольника. В каждом ряду выбран самый высокий, в каждой шеренге — самый низкий. Кто выше: самый высокий из низких или самый низкий из высоких?

510. Двое играют на шахматной доске, передвигая по очереди одного короля. Допускаются ходы на одно поле влево, вниз или влево-вниз по диагонали. Выигрывает тот, кому удастся поставить короля на левый нижний угол. При каких начальных положениях короля выигрывает начинающий, а при каких его партнёр?

510.′ Имеются 2 кучи камней. Двое играющих берут по очереди камни. Разрешается взять один камень из любой кучи или по одному камню из обеих куч. Выигрывает взявший последние камни. При каком числе камней в кучах выигрывает начинающий?

511. На доске 6×6 двое по очереди закрашивают клетки так, чтобы не появлялись закрашенные уголки из трёх клеток. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.*)

511! Двое по очереди кладут пятаки на круглый стол, чтобы они не налегали друг на друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

512. Двойными шахматами назовём игру, отличающуюся от обычных шахмат только тем, что каждый из противников может делать 2 хода подряд. Докажите, что белые могут выиграть или добиться ничьей.

513. Поставьте на шахматную доску 8 ферзей, чтобы они не били друг друга.

*) В уголок могут входить клетки, закрашенные любым из игроков. Иными словами, надо представлять себе, что карандаши у них одного цвета.

514. Первая слева цифра десятизначного числа равна числу единиц в записи этого числа, вторая — числу двоек, третья — числу троек, четвёртая — числу четвёрок, ... , девятая — числу девяток, десятая — числу нулей. Придумайте такое число.[†)]

515. Поставьте вместо многоточий числа[*)], чтобы получилось истинное высказывание:

> В этом предложении цифра 0 встречается ... раз, цифра 1 — ... раз, 2 — ... раз, 3 — ... раз, 4 — ... раз, 5 — ... раз, 6 — ... раз, 7 — ... раз, 8 — ... раз, 9 — ... раз.

Подсказка. Заполните таблицу:

Цифра	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
встречается											раз.

516. На балу было 43 человека. Первая дама танцевала с 8 кавалерами, вторая — с 9 кавалерами, третья — с 10 кавалерами, ... , а последняя дама танцевала со всеми кавалерами. Сколько было дам и сколько кавалеров?

517. Может ли равняться единице сумма ста дробей, знаменатели которых нечётны? Иными словами, существуют ли такие нечётные натуральные числа a_1, a_2, ... , a_{100}, что

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{100}} = 1?$$

518*. а) В вершинах правильного 7-угольника расставлены чёрные и белые фишки. Докажите, что найдутся три фишки одного цвета, лежащие в вершинах равнобедренного треугольника.

б) Верно ли аналогичное утверждение для 8-угольника?

в)* Выясните, для каких правильных n-угольников аналогичное утверждение верно, для каких — нет.

[†)] Такое число единственно.

[*)] *Для Придиры.* Записанные в десятичной системе счисления.

«Ты — мне, я — тебе», или дилемма заключённого

Представьте себе, что как-то раз после уроков вы с приятелем задержались в школе. Никого в коридоре уже не было, и вы радовались тишине. Вдруг из ему одному ведомого места выбежал Вовочка и начал какой-то дубиной крушить всё, что может. Сначала вы растерялись от неожиданности, но потом, чтобы его остановить, схватили что под руку попалось,— и тут некстати видите спешащего на звук битого стекла директора школы.

Вовочку уже не догонишь, директор его не видел. Но зато директор видел вас. И поскольку свидетелей не было, оправдаться трудно. С низко опущенными от незаслуженных обвинений головами вы сидите в кабинете директора и слушаете: «Я своими ушами слышал, как били стекла. И не верю, что они разбились сами. И никакого Вовочки тут не было, во всяком случае я его не видел. Если вы оба откажетесь признать свою вину, то получите по замечанию в дневник за то, что бегали по школе. Если один из вас признает вину, а другой нет, я прощу того, кто признался и даже дам ему конфетку, а другому придётся заплатить за весь ремонт и расстаться с нашей школой. А если признаетесь оба, то пополам заплатите за ремонт школы — и будем считать эту неприятную историю исчерпанной.»

«Понятно», — отвечает вы хором, и директор разводит вас по разным классам, чтобы вы обдумали его предложение. Посоветоваться друг с другом вы не можете, и решение каждому придется принимать самостоятельно. Итак: признать или отрицать вину?

Впрочем, предавать товарища не годится. Поэтому постараемся отвлечься от моральных соображений, «выключим» голос совести и будем считать, что вы оба заинтересованы только в том, чтобы отделаться как можно легче. Вы можете рассуждать логически: «Если приятель решит признать вину, то признавать нужно и мне — иначе выгонят из школы и заставят одного меня платить за всё. Если он не признает вину, то мне тоже лучше признаться — тогда меня вообще не накажут и даже конфетку дадут. В любом случае — лучше сознаться!» И вы идёте к директору, придумывая, как вы разбили стекло. Но ваш приятель рассуждал точно так же и тоже пришел к выводу, что лучше признаться. В результате — платите за ремонт.

А ведь если бы не сознались, то отделались бы всего-то замечанием. Получается парадоксальная ситуация — совершенно правильные рассуждения привели к нежелательному исходу. Это и есть знаменитый парадокс, известный как «дилемма заключённого» (обычно рассказывают историю про двух заключённых, сидящих в разных камерах, а роль директора играет следователь).

Если вам кажется, что вопрос этот не очень серьёзный — какое дело нам, свободным людям, до каких-то заключённых! — подумайте о другом варианте этого парадокса. На сей раз в нём участвуют две враждующие державы, которые могут нанести ракетно-ядерный удар. Если нападают одновременно, обе несут огромный ущерб. Если одна страна нападает, а другая не готова к атаке, то начавшая войну первой побеждает и (через несколько тысяч лет, когда спадёт радиоактивность) сможет воспользоваться богатствами проигравшей страны. Наконец, если обе страны не нападают, то несут не очень значительный ущерб — всего лишь надо платить зарплату военным и модернизировать вооружения. Неужели и в этом случае логика обеим сторонам подсказывает выбор агрессивного поведения? Об этом даже думать страшно ...

Игроки		Очки	
I	II	I	II
О	*О*	3	3
О	*П*	0	5
П	*О*	5	0
П	*П*	1	1

Парадокс заключённого можно сформулировать и на языке теории игр. Два игрока одновременно делают один из двух возможных ходов: «признать» (коротко «*П*») или «отрицать» («*О*»). Если оба делают ход *П*, то получают мало; если оба выбирают ход *О*, то получают существенно больше; если же один игрок делает ход *П*, а другой — *О*, то первый получает ещё больше, а второй не получает ничего хорошего. Всё это можно записать в виде таблицы. Величины выигрышей (числа 1, 3, 5) выбраны более или менее произвольно. Из таблицы видно, что при любом ходе противника игрок получит больше, если сделает ход *П*, а не *О* — это и обеспечивает парадокс.

В 1979 году мичиганец Роберт Аксельрод решил исследовать дилемму заключённого с помощью компьютера. Он обратился с предложением провести турнир компьютерных программ в описанную выше игру. На его призыв откликнулись 14 человек. Турнир был организован так: каждая программа играла 5 серий по 200 игр с другими программами, в том числе сама с собой. Победителем турнира объявлялась команда, набравшая в сумме наибольшее количество очков (заметьте: цель не в том, чтобы победить каждую из программ-соперниц, а набрать в сумме побольше очков).

Принципы игры программ могли быть любыми (например, очередной ход *П* или *О* можно выбирать случайно), но большинство программ помнили все предыдущие ходы противника и выбирали очередной ход, анализируя эту информацию. Авторы старались составить программы так, чтобы поощрять «сотрудничество» противника (то есть выбор им хода *О*), и к тому же зарабатывать очки, «предавая».

Прежде чем сказать, чем закончилось это состязание алгоритмов, напомню рассказ Эдгара По «Украденное письмо»: "Я знал одного восьмилетнего мальчика, который изумлял всех своим искусством играть в «чёт и нечет». Игра эта очень простая: один из играющих зажимает в руке несколько шариков, а другой должен угадать, чётное их число или нечётное. Если угадает — получит один шарик. Если нет — должен отдать шарик противнику. Мальчик, о котором я говорю, обыгрывал всех в школе. Разумеется, у него был свой метод отгадывания, основанный на простой наблюдательности и оценке сообразительности партнёров. Например, играет с ним какой-нибудь простофиля, зажал в руке шарики и спрашивает: «Чёт или нечет?» Наш игрок отвечает: «Нечет» — и проигрывает. Но в следующий раз уже выигрывает, ибо он рассуждает так: «Простофиля взял в первый раз чётное число, хитрости у него хватит как раз настолько, чтобы взять теперь нечет,— поэтому я должен сказать нечет". Он говорит: «Нечёт» — и выигрывает. Имея дело с партнёром немного поумнее, он рассуждал так: «В первый раз я сказал нечёт; помня это, он будет рассчитывать (как и первый), что в следующий раз я скажу чёт, и, стало быть, ему следует взять нечет. Но он тотчас сообразит, что это слишком простая хитрость, и решится взять чёт».”

Результат турнира оказался не в пользу византийских хитрецов: выиграла самая простая из программ. Её придумал Анатолий Раппопорт из Торонто. Играет она так:

- первый ход — O;
- каждый следующий ход — это предыдущий ход противника.

Вот и всё!

Заметьте, что программа «Ты — мне, я — тебе» не способна выиграть ни одной игры; лучшее, на что она может надеяться,— это ничья. Действительно, пока противник отвечает на её ходы O своими O, обе программы набирают по 3 очка. Как только противник «обманывает» программу «Ты — мне, я — тебе», сделав ход $П$, она мстит за это ходом $П$, в лучшем случае возвращая себе потерянные очки. Но программа «Ты — мне, я — тебе» не злопамятна: как только противник «раскаялся», сделав ход O, она отвечает тем же «доброжелательным» ходом.

Почему же «Ты — мне, я — тебе» побеждает в турнире? Рассмотрим мини-соревнивание, в котором участвует ещё одна программа «Предатель», всегда делающая ход $П$. Пусть каждая игра состоит из 10 ходов. Всего проведём три игры: «Ты — мне, я — тебе» против «Предателя», «Ты — мне, я — тебе» против самой себя и, наконец, «Предатель» сам с собой.

Легко проверить, что «Ты — мне, я — тебе» набирает в первой и второй играх, соответственно, 9 и 30 очков. А «Предатель» в первой и третьей играх набирает 14 и 10 очков. Итого: «Ты — мне, я — тебе» побеждает с результатом 39 очков против 24 у «Предателя».

Если бы программа «Ты — мне, я — тебе» была человеком, её можно было бы назвать доброжелательной, готовой к сотрудничеству, не прощающей предательства и не злопамятной. Локально эти свойства невыгодны. Глобально — именно они приводят к триумфу. Поучительно и для нас с вами, не правда ли?

Ответы, указания, решения

Не так уж сложно построить серию выводов, в которой каждый последующий простейшим образом вытекает из предыдущего. Если после этого удалить все средние звенья и сообщить слушателю только первое звено и последнее, они произведут ошеломляющее, хотя и ложное впечатление.

Шерлок Холмс

2. Крышка квадратного люка могла бы провалиться в него.

5. На 1 стирку.

10. 2, 2 и 9. Выпишем разложения числа 36 на три множителя:

$$1 \cdot 1 \cdot 36 = 1 \cdot 2 \cdot 18 = 1 \cdot 3 \cdot 12 = 1 \cdot 4 \cdot 9 = 1 \cdot 6 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 9 = 2\dot{3} \cdot 6 = 3 \cdot 3 \cdot 4.$$

Суммы сомножителей этих разложений равны, соответственно, 38, 21, 16, 14, 13, 13, 11 и 10. Зная количество окон, милиционер не мог установить возрасты лишь в ситуации $2 \cdot 2 \cdot 9 = 1 \cdot 6 \cdot 6$. Если в семье есть старший сын, вариант $1 \cdot 6 \cdot 6$ отпадает.

11. 15. А именно, 14 девочек и Миша.

13. Груша (плод, который висит на дереве) и груша (дерево, на котором растут похожие на электрическую лампочку плоды, которые можно скушать) одинаково звучат по-русски, но не по-венгерски. Окончание k означает множественное число, а добавление букв fa превращает яблоко в яблоню, берёзовую серёжку — в березу, и вообще, плод — в дерево, на котором этот плод растёт.

15. Дадим Маше ещё 2 шарика. Тогда у неё станет столько же шариков, сколько у Даши. А у Саши 1 шарик заберём — тогда у него станет шариков столько же, сколько у других. Осталось разделить поровну на троих $11 + 2 - 1 = 12$ шариков.

17. 3 сестры и 4 брата.

18. 14 овец. Если все 36 животных — куры, то ног $2 \cdot 36 = 72$. Чем отличается овца от курицы? У овцы на 2 ноги больше! Значит, заменяя курицу на овцу, мы увеличиваем число ног на две, и таких замен надо произвести $(100 - 72) : 2 = 14$.

19. Если бы в коробке были только жуки, то ног было бы $6 \cdot 8 = 48$, то есть на 6 меньше, чем указано в задаче. Шесть «лишних» ног осталось из-за того, что у паука на 2 ноги больше, чем у жука. Значит, эти 6 ног принадлежат паукам, то есть пауков $6 : 2 = 3$. Жуков тогда $8 - 3 = 5$. Итак, в коробке 5 жуков и 3 паука. Проверим: у 5 жуков 30 ног, у 3 пауков 24 ноги, а всего $30 + 24 = 54$ ноги, как и требует условие задачи.

22. 41312432.

23. Мальчики на лодке плывут к другому берегу. Один из них остаётся там, а другой возвращается. Один солдат переправляется, вылезает, а мальчик возвращает лодку. Таким образом, чтобы переправить одного солдата, лодка 4 раза плывёт от берега до берега.

26.

Переходят папа и мама	2 минуты
Папа с фонариком возвращается	1 минута
Переходят бабушка и малыш	10 минут
Мама с фонариком возвращается	2 минуты
Переходят папа и мама	2 минуты
Итого	17 минут

27. Они подошли с разных сторон.

32. Если в первой пачке вдвое меньше тетрадей, чем во второй, то в первой пачке $30 : 3 = 10$ тетрадей, а во второй — 20. Значит, в первой пачке было 12 тетрадей, а во второй — 18.

39. Она собрала $10 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 160$ яблок. Стражники получили $160 - 10 = 150$ яблок.

40. Витя съел 4 сливы. Значит, увидел он $4 \cdot 3 = 12$ слив. Составим таблицу:

	Мама	Аня	Боря	Витя
Увидел(а)	–			12
Съел(а)	–			4
Оставил(а)	?			8

Заполним её. Боря оставил те самые 12 слив, которые увидел Витя. Боря съел треть увиденных им слив. Значит, Боря съел 6 слив, а увидел 18 слив. Именно столько слив оставила Аня (между прочим, $12 : (2/3) = 18$). Мама оставила $18 : (2/3) = 27$ слив:

	Мама	Аня	Боря	Витя
Увидел(а)	–	27	18	12
Съел(а)	–	9	6	4
Оставил(а)	27	18	12	8

41. Разность между числом и суммой его цифр всегда делится на 9. Поэтому все числа, кроме, возможно, исходного, делятся на 9. Следовательно, 0 получился из 9, число 9 получилось из 18, и вообще, имеем цепочку:

$$0 \leftarrow 9 \leftarrow 18 \leftarrow 27 \leftarrow 36 \leftarrow 45 \leftarrow 54 \leftarrow 63 \leftarrow 72 \leftarrow 81$$

Здесь нужно быть внимательным: 81 можно получить как из 90, так и из 99. Но 90 ни из какого числа не получишь! А число 99 получается из 100, из 101, … , из 109.

43. ё) $5\cdot5+5:5=26$; ж) $(5:5+5)\cdot5=30$; з) $5\cdot5+5\cdot5=50$; и) $55+5-5=55$; й) $5\cdot5\cdot5-5=120$; к) $5\cdot5\cdot5+5=130$; л) $5\cdot5\cdot5\cdot5=625$; м) $555:5=111$.

44. $3:3+(3-3)\cdot3=1$; $(3+3):3+3-3=2$; $3+(3-3)\cdot33=3$; $3:3+{}$ ${}+3-3+3=4$; $3:3+3:3+3=5$; $3+3+(3-3)\cdot3=6$; $3\cdot3-(3+3):3=7$; $3+3+(3+3):3=8$; $3\cdot3-(3-3):3=9$; $3:3+3+3+3=10$.

45. $5:5+(5-5)\cdot5=1$; $(5+5):5+5-5=2$; $(5\cdot5-5-5):5=3$; $5-5:5+5-5=4$; $5+(5-5)\cdot(5+5)=5$; $5+5:5+5-5=6$; $5+5:5+5:5=7$; $5+(5+5+5):5=8$; $(5\cdot5-5):5+5=9$.

46. $4+4-4-4=0$; $4:4+4-4=1$; $4:4+4:4=2$; $(4+4+4):4=3$; $(4-4)\cdot4+4=4$; $(4+4\cdot4):4=5$; $4+(4+4):4=6$; $4+4-4:4=7$; $4+4+4-4=8$; $4+4+4:4=9$; $(44-4):4=10$.

47. $7:7+7-7=1$; $7:7+7:7=2$; $(7+7+7):7=3$; $77:7-7=4$; $7-(7+7):7=5$; $(7\cdot7-7):7=6$; $7+(7-7)\cdot7=7$; $(7\cdot7+7):7=8$; $7+(7+7):7=9$.

50. $1+2+3+4+5+6+7+8\cdot9=100$.

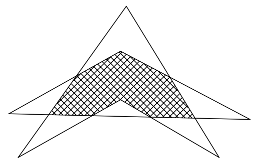
51. Одно яблоко отдайте вместе с корзиной.

53. Завтракали дед, его сын и внук.

54. Один кошелёк внутри другого.

55. Нет.

56. Перелейте воду из второго стакана в пятый.



58. Двоеточие после слова «двадцать».

59. Лестница поднимается вместе с кораблём.

60. Большой зелёный подземный камнеед.

62. Разделите по вертикали фигурки пополам и вспомните, как пишут индекс на почтовом конверте.

63. Министр может вытащить листок бумаги и, не глядя, сжечь его. Поскольку на оставшемся листке написано «Уходите», королю придётся признать, что на уничтоженном листке было слово «Останьтесь».

65. 8 (см. рис.).

66. Может. Отец сына — это муж; профессор — женщина.

68. $1+1999=2000$.

69. р) Произведение $6*$ на $*$ может быть двухзначным числом только в том случае, когда второй сомножитель равен 1. Значит, во второй строке ребуса стоит число 111. Последняя цифра произведения может быть равна 6 только тогда, когда в разряде единиц первого сомножителя стоит 6.

70. Поскольку при умножении пятизначного числа на 9 получено число пятизначное, то в исходном числе крайняя слева цифра 1.

Число, полученное после умножения данного числа на 9, оканчивается цифрой 1. Значит, исходное число оканчивается цифрой 9 ($9 \cdot 9 = 81$):

$$\times\begin{array}{r}1{*}{*}{*}9\\ 9\\ \hline 9{*}{*}{*}1\end{array}$$

Если бы в разряде тысяч исходного числа стояла цифра 2 (или любая бо́льшая цифра), то произведение было бы слишком большим: $12\,001 \cdot 9 > 100\,000$. Значит, в разряде тысяч — цифра 0 или 1. Рассмотрим два случая:

1) $$\times\begin{array}{r}11{*}{*}9\\ 9\\ \hline 9{*}{*}11\end{array}.$$

Поскольку $11 \cdot 9 = 99$, вторая цифра произведения (она же — разряд десятков исходного числа) есть 9. Имеем:

$$\times\begin{array}{r}11{*}99\\ 9\\ \hline 99{*}11\end{array}$$

Так не бывает, первый случай не подходит. (Но не разобрать его было бы ошибкой. Решить ребус — значит не только подобрать какой-нибудь подходящий вариант, но и доказать, что нет никаких других.)

2) $$\times\begin{array}{r}10{*}{*}9\\ 9\\ \hline 9{*}{*}01\end{array}.$$

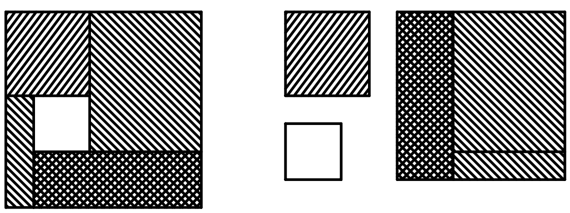
Поскольку $9 \times 9 = 81$, в разряд десятков из разряда единиц переносится 8. Чтобы в разряде десятков произведения оказалась цифра 0, предпоследняя цифра исходного числа должна быть 8:

$$\times\begin{array}{r}10{*}89\\ 9\\ \hline 98{*}01\end{array}$$

Получаем ответ:

$$\times\begin{array}{r}10989\\ 9\\ \hline 98901\end{array}.$$

80.



81. 7, поскольку последний кусок отрезать не надо. **82.** В 5 раз. **84.** Можно целиком расковать одну цепь (3 звена).

85. *Ответ:* во вторник следующей недели в 6 часов вечера. В самом деле, за сутки гусеница поднимается вверх на 1 метр. Значит, за 8 суток (то есть к 6 часам утра вторника следующей недели) она поднимется на высоту 8 м. А к 18 часам вторника — покорит вершину!

90. *Указание.* Нарисуйте шестиугольник.

92. 5 рублей. Распространённый неправильный ответ — 10 рублей. Допустим, однако, что у них, скажем, по 50 рублей. Если Акулина даст

10 рублей, то у Анфисы окажется 60 рублей, а у Акулины 40. Следовательно, разница составит не 10, а 20 рублей.

94. 20 рублей. Купить 5 больших птиц — то же, что купить 10 маленьких, так что покупка 5 больших и 3 маленьких птиц равноценна покупке 13 маленьких. Аналогично, цена 3 больших и 5 маленьких равна цене 11 маленьких птиц. Значит, $13-11=2$ маленькие птицы стоят 20 рублей.

95. Дедушке 84 года, внучке 7 лет.

96. Деду $100-45=55$ лет, сыну $(45-25):2=10$ лет, отцу $10+25=35$ лет.

100. Если собака стоит x рублей, то корова стоит $4\cdot x$, 2 коровы — $8\cdot x$, а лошадь — $16\cdot x$. Чтобы найти x, разделим 200 рублей на $1+8+16=25$ частей. Итак, собака стоит 8 рублей, а корова — 32.

103. Три курицы снесли за 3 дня 3 яйца. Следовательно, 3 курицы снесут за 12 дней в 4 раза больше яиц ($3\cdot 4=12$), а 12 кур за 12 дней ещё в 4 раза больше, то есть $12\cdot 4=48$ яиц. Решение задачи удобно записать в виде таблицы:

Кур	Дней	Яиц
3	3	3
3	12	$3\cdot 4=12$
12	12	$12\cdot 4=48$

105. За 2 часа 6 землекопов выроют 6 ям, за 5 часов — в $2\frac{1}{2}$ раза больше, то есть 15 ям.

106. 12 косцов. Косец за час выпивает $1/48$ бочонка. За 3 часа один косец выпивает $1/12$ бочонка.

108. Когда Серёжа станет втрое старше Вовы, разность их возрастов будет равна удвоенному возрасту Вовы. Поскольку разность возрастов не меняется со временем, она всегда равна $11-1=10$ годам. Значит, Вове будет 5 лет, а Серёже — 15.

109. $13+7=20$ лет назад я был вдвое моложе, чем сейчас. Следовательно, мне 40 лет.

110. а) Разница в возрасте между отцом и сыном равна $27-3=24$ годам. Сейчас отцу втрое больше лет, чем сыну. Поэтому 24 года — это удвоенный возраст сына.

113. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{25}{12}$ и $100:\frac{25}{12}=48$.

117. Они ровесники, им по 6 лет.

119. 1 год. Чтобы не запутаться, обозначим возрасты Коли, Оли и Поли буквами K, O и Π соответственно. Поскольку Коля был молод, как Оля, $K-O$ лет назад, а тётушка Поля была в возрасте Коли $\Pi-K$ лет назад, условие задачи можно переформулировать следующим образом:

> $K-O$ лет назад Поле было на 1 год меньше, чем $K+O$ лет.
> Сколько лет было Коле $\Pi-K$ лет назад?

Теперь условие задачи можно записать в виде равенства

$$П - (К - О) = К + О - 1,$$

а искомая величина есть $К - (П - К)$.

128. Выстроим ботинки парами. Тогда всего будет 20 пар. Взяв 21 ботинок, мы обязательно возьмём два ботинка из какой-то пары, то есть всю её целиком!

130. Поскольку Сова и Кролик вместе съели 45 бананов, кто-то из них съел не менее 23 бананов. Значит, Винни–Пух съел не менее 24 бананов. Сова, Кролик и Пух вместе съели не менее 69 бананов. Поскольку Пятачку тоже что-то досталось, то Сова, Кролик и Пух вместе съели ровно 69 бананов, а Пятачок – 1 банан.

131. 7. *Указание.* Если вытащим 8 банок, то это могут оказаться 3 банки малинового и 5 банок вишнёвого варенья.

134. 60 км/ч — это 1 километр в минуту. Бесконечно быстро двигаться нельзя, выиграть на каждом километре 1 минуту не удастся.

159. Николай Петрович поймал 5 рыб.

166. Начинающий может победить при любом начальном положении короля. Суть стратегии в следующем. Подсчитаем число вертикальных ходов, которыми король может с исходного поля дойти до нижней (первой) горизонтали, а также количество «прямых» ходов, которыми король может дойти до верхней (восьмой) горизонтали. Поскольку сумма этих чисел равна $8 - 1 = 7$, то одно из них нечётно.

Пусть, для определённости, надо сделать нечётное число ходов, чтобы дойти до нижней горизонтали. Тогда первый игрок может пойти прямо вниз; номер горизонтали уменьшится на 1 и из чётного станет нечётным. Что делать второму? Если он сделает горизонтальный ход или вернётся диагональным ходом на исходную горизонталь, то первый игрок сразу сможет выиграть. Поэтому второй игрок будет вынужден сделать вертикальный или диагональный ход, спустившись ещё ниже.

В ответ первый игрок опять может пойти вертикально вниз. Второму, чтобы не проиграть, опять придётся опустить короля ещё ниже, и так будет продолжаться до того, как после очередного хода первого игрока король попадёт на нижнюю горизонталь. Тогда второму игроку придётся сделать горизонтальный ход или поднять короля по диагонали вверх, после чего первый игрок побеждает, ставя короля на ранее пройденное поле.

Заметим, что если бы размеры доски были иными (например, 9×9), то не каждое исходное положение короля приносило бы выигрыш тому, кто делает первый ход: 16 полей (подумайте, какие именно) были бы выигрышными для второго игрока.

172. 0 или 1000.

174. Добрыня Никитич и Алёша Попович сказали одно и то же, поэтому правду сказал Илья Муромец. Змея Горыныча убил Добрыня Никитич.

177. Автомобилист шёл пешком столько же времени, сколько велосипедист затратил на весь путь.

180. Поскольку велосипедист проехал треть пути быстрее, чем мотоциклист проехал две трети, его скорость больше половины скорости мотоциклиста.

181. Достаточно передвинуть куда-нибудь крайнюю спичку (например, положить её рядом с другой крайней).

182. Да, можно бросить мяч вертикально.

183. Если постараться, из арбуза можно вырезать кусок в виде «столбика», идущего сквозь весь арбуз. У этого куска будут две корки, соединённые арбузной мякотью.

185. а) Положите спичку в углу стола, «отрезав» ею треугольник. б) Две спички положите в углу стола, чтобы края его дали две другие стороны квадрата.

187. Три секунды. За это время они, конечно, поймут, что им никогда не вырыть такой ямы, да и рыть её незачем. (Подробности — в сказке Памелы Треверс «Мэри Поппинс».)

188.

7	10	13
22	26	30
4	9	14

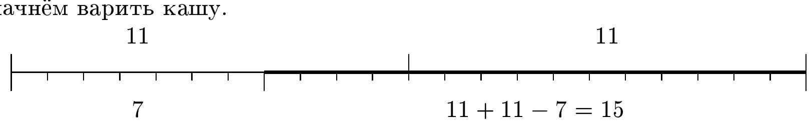
189. 31121314. Каждое следующее число описывает предыдущее: «в числе была одна единица» — 11; «две единицы» — 21; «одна единица, одна двойка» — 1112 и так далее.

190. У ковбоя в горле застряла кость и от испуга выскочила!

191. Он гадал: «любит — не любит, ... ».

192. Всегда получится число 6174, которое переходит само в себя.

198. $15 = (11 - 7) + 11$. Запустим часы одновременно, через 7 минут начнём варить кашу.



Для Знайки. Что пришлось бы делать, если бы были часы на 47 минут и на 31 минуту (а кашу по-прежнему надо варить ровно 15 минут)?

214. На 25%, ибо $1 : (1 - 0{,}2) = 1{,}25$.

225. Четверть круга весит 1 кг, круг — 4 кг.

229. а) 1111; б) 147.

237. Разрежьте доску на 4 доски 4×4 и на каждой из них в углу разместите 8 коней в виде квадрата 3×3.

238. Вообразите, что продавец не ушёл домой, а остался за своим прилавком. Пусть покупатели тратят по 2 рубля, покупая у каждого продавца на рубль. Тогда первые 10 покупателей купят 20 дорогих и 30 дешёвых яблок, так что дешёвые яблоки кончатся раньше, чем дорогие. Рубль исчез потому, что оставшиеся 10 дорогих яблок продали не по два яблока за рубль, а как смесь, по 5 яблок за 2 рубля.

Другими словами, поскольку более дорогое яблоко стоило $\frac{1}{2}$ рубля за штуку, а более дешёвое — $\frac{1}{3}$ рубля, следовало продавать их по $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right):2=\frac{5}{12}$ рубля. Эта цена выше, чем установленная продавцами цена в $\frac{2}{5}$ рубля за штуку. (И выше ровно на $\frac{5}{12}-\frac{2}{5}=\frac{1}{60}$.)

242. Всего денег у купцов $(90+85+80+75):3=110$ рублей. Поэтому у первого $110-90=20$, у второго $110-85=25$, у третьего $110-80=30$, а у четвёртого $110-75=35$ рублей.

249′. Рассмотрите сумму всех чисел таблицы.

261. а) Подставив $T_Ц=0$, получим $b=32$. При $T_Ц=100$ получаем $212=100a+b$, откуда $a=1{,}8$. б) $T=-40^\circ$.

267. Разбейте всё множество целых чисел на 5 классов: в один класс поместите числа

$$\ldots-14,\ -9,\ -4,\ 1,\ 6,\ 11,\ 16,\ 21,\ 26,\ \ldots,$$

дающие остаток 1 при делении на 5, в другой — числа

$$\ldots-13,\ -8,\ -3,\ 2\ 7,\ 12,\ 17,\ 22,\ 27,\ \ldots,$$

дающие остаток 2, в третий — числа, дающие остаток 3 при делении на 5, в четвёртый — остаток 4, в пятый — дающие остаток 0.

268. *Указание.* Разбейте все целые числа на n классов в соответствии с тем, какой остаток получается при делении на n.

271. а) Да, например, числа от 50 до 99.

272. б) Рассмотрим 51 ящик с табличками: $\boxed{0}$, $\boxed{1–99}$, $\boxed{2–98}$, $\boxed{3–97}$, …, $\boxed{49–51}$, $\boxed{50}$. Число помещаем в ящик, на табличке которого присутствует остаток деления числа на 100. Если чисел 52, какие-то два попадут в один ящик.

281. Разобьём доску на 16 квадратиков 2×2 и покрасим их в разные цвета. Докажем, что больше 16 цветов получить нельзя. Рассмотрим клетку любого цвета. Рядом с ней есть ещё две клетки того же цвета. Эти две клетки имеют только одну соседнюю клетку того же цвета (среди рассмотренных), поэтому есть ещё одна клетка такого же цвета. Итак, каждого цвета не меньше четырёх клеток; следовательно, цветов не больше 16.

293. Уравновесим на весах груз более тяжёлый, чем тело, которое нужно взвесить. Затем на чашку с гирями положим взвешиваемое тело и снимем несколько гирь, чтобы восстановить равновесие. Вес снятых гирь равен весу тела.

294. Положим на чашки по одной детали. Если весы останутся в равновесии, то на чашках лежали хорошие детали. (Если весы не в равновесии, то хорошие — две оставшиеся; решение при этом аналогично.)

Заменим одну из них одной из оставшихся. Если весы останутся в равновесии, то фальшивая деталь — четвёртая (оставшаяся; только в этом случае мы не будем знать,*) легче она остальных или тяжелее). Если же одна из чашек опустится, то фальшивая — та деталь, которую только что положили на чашку.

296. Вопрос может звучать так: «Верно ли, что и Алёше Поповичу, и Добрыне Никитичу досталось хотя бы по одной серебряной монете?» Если ответ утвердительный, то обе монеты Ильи Муромца — золотые. Если отрицательный, то Илье достались две серебряные монеты. А если Илья не сможет ответить ни «да», ни «нет», то он получил за службу золотую и серебряную монеты.

Можно было задать и другие вопросы, например:

— Верно ли, что хотя бы одному из двух других богатырей достались две серебряные монеты?

— У тебя больше золотых монет, чем у Алёши Поповича?

— Если я заберу одну из твоих монет и дам вместо неё золотую, то станет ли у тебя больше золотых? (Заметьте, что в этом вопросе не упомянуты монеты, доставшиеся двум другим богатырям!)

298. Эту задачу удобно решать, применяя *двоичную* систему счисления.

В привычной, десятичной системе счисления любое натуральное число представимо единственным образом в виде

$$a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0,$$

где коэффициенты a_0, a_1, ..., a_k могут принимать любые целые значения от 0 до 9. Например,

$$3467 = 3000 + 400 + 60 + 7 = 3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0.$$

Аналогично, в двоичной системе любое натуральное число представимо (единственным способом) в виде

$$b_m \cdot 2^m + b_{m-1} \cdot 2^{m-1} + \ldots + b_1 \cdot 2^1 + b_0 \cdot 2^0,$$

где коэффициенты b_0, b_1, ..., b_m могут принимать значения 0 или 1.

Так, $467 = 256+211 = 256+128+83 = 256+128+64+19 = 256+128+ +64+16+2+1 = 1\cdot 2^8+1\cdot 2^7+1\cdot 2^6+0\cdot 2^5+1\cdot 2^4+0\cdot 2^3+0\cdot 2^2+1\cdot 2^1+1\cdot 2^0$, или, сокращённо, $467 = \overline{111010011}_2$, где двойка обозначает основание системы счисления.

Любое число от 1 до 1023 можно представить в двоичной системе счисления как десятизначное число (возможно, начинающееся на нуль). На-

*) *Докажите*, что выяснить это действительно невозможно.

пример,

$$\begin{aligned} 1023 &= \overline{1111111111}, \\ 1000 &= \overline{1111101000}, \\ 513 &= \overline{1000000001}, \\ 32 &= \overline{0000100000} \end{aligned}$$

Для выяснения любой цифры («бита») двоичной записи достаточно задать один вопрос. Например, для выяснения первой цифры достаточно спросить: «Число меньше, чем 512?»

Так за 10 вопросов можно узнать все цифры двоичной записи числа, то есть само число. Ме́ньшего количества вопросов недостаточно, ибо для девяти вопросов комбинаций ответов (типа «да – нет») имеется $2^9 = 512$, что не позволяет распознать 1000 чисел.

299. Здесь деление не пополам, а на три, по возможности, равные части.

в) Первое взвешивание: кладём на чаши по 27 монет. В случае равновесия фальшивая монета — среди оставшихся 26. Если же одна чаша легче, то фальшивая среди лежащих на ней.

Второе взвешивание: кладём на обе чаши по 9 монет из числа «подозреваемых», и так далее.

В общем случае, для n монет, искомое число взвешиваний k определяется из неравенств

$$3^{k-1} < n \leqslant 3^k.$$

Кажется очевидным, что k есть *минимальное* число взвешиваний, то есть что при любом способе взвешиваний ситуация может сложиться так, что после $k-1$ взвешиваний фальшивая монета не будет выделена.

Доказательство можно провести следующим образом. При каждом взвешивании монеты распадаются на три группы: монеты, попавшие на левую чашу, монеты, попавшие на правую чашу, и, наконец, монеты, не попавшие ни на какую чашу. Если на чаши весов было положено разное число монет, то в случае, когда перетянула чашка, где монет больше, фальшивая монета может оказаться в любой из этих трёх групп и такое взвешивание вообще не даст нам никаких сведений. Если же на чашах было поровну монет, то либо весы уравновесятся (это значит, что фальшивая монета не попала на весы), либо одна из чаш перетянет (фальшивая монета — на более легкой чаше).

Пусть после каждого взвешивания фальшивая монета каждый раз оказывается в той группе, которая содержит наибольшее число монет. Тогда при каждом взвешивании число монет «подозреваемых» монет убывает не более чем в три раза, так что после $(k-1)$ взвешиваний останется не менее чем $\frac{n}{3^{k-1}} > 1$ «подозреваемых» монет.

300. Обозначим красные гири через $К_1$ и $К_2$, жёлтые — $Ж_1$ и $Ж_2$, а зелёные — $З_1$ и $З_2$. Сначала положим на левую чашу весов гири $К_1$ и $Ж_1$, а на правую — $К_2$ и $З_1$. Рассмотрим два случая:

- **Весы в равновесии.** Поскольку из гирь K_1 и K_2 одна лёгкая, а другая тяжёлая, то есть две возможности: либо гири K_1 и $З_1$ лёгкие, а гири $Ж_1$ и K_2 тяжёлые; либо гири K_1 и $З_1$ тяжёлые, а гири $Ж_1$ и K_2 лёгкие. Вторым взвешиванием сравниваем красные гири.
- **Весы не в равновесии.** Пусть, для определённости, перевесила левая чаша. Тогда обязательно K_1 тяжёлая, а K_2 лёгкая. Если бы гиря $Ж_1$ была лёгкая, а $З_1$ тяжёлая, то весы были бы в равновесии. Значит, есть три возможности: $Ж_1$ и $З_1$ обе лёгкие; $Ж_1$ тяжёлая, а $З_1$ лёгкая; наконец, обе гири $Ж_1$ и $З_1$ — тяжёлые.

  Различить эти три случая очень просто: достаточно на левую чашу весов положить K_1 и K_2, а на правую — $Ж_1$ и $З_1$.

302. а) Если распилить третье звено, то цепочка распадётся на три части: 1, 2 и 4 звена. С их помощью удастся расплатиться: $1 = 1$, $2 = 2$, $3 = 2 + 1$, $4 = 4$, $5 = 4 + 1$, $6 = 4 + 2$, $7 = 1 + 2 + 4$.
б) Решим задачу в общем случае (n дней и n звеньев). Заметим сначала, что если у путешественника имеется цепочка из $n = (k+1)2^{k+1}-1$ звеньев, то он может распилить k звеньев так, чтобы получились куски, состоящие соответственно из $(k+1)$, $2(k+1)$, $2^2(k+1), \ldots, 2^k(k+1)$ звеньев.

Располагая этими кусками и k распиленными звеньями, путешественник может расплачиваться с хозяином в течение n дней. Если число n звеньев цепочки не представляется в виде $n = (k+1)2^{k+1} - 1$, то надо рассмотреть наименьшее целое число k такое, что $n < (k+1)2^{k+1} - 1$. В частности, если $n = 100$, то достаточно распилить $k = 4$ звена. *(Какие?)*

303. Занумеруем мешки числами от 0 до 9. Возьмём из каждого мешка столько монет, каков его номер. Если бы все монеты были настоящие, они весили бы $10+20+\ldots+90 = 450$ г. Избыток веса совпадает с номером мешка, где лежат фальшивые монеты.

Для Знайки. Можно ли обойтись одним взвешиванием, если количество мешков с фальшивыми монетами заранее неизвестно и может оказаться любым, от 0 до 10?[*)]

304. С помощью трёх взвешиваний расположим по весу три пакета (взвешивая каждую пару), потом положим на одну чашку весов оставшийся (четвёртый) пакет, а на другую тот из трёх, который имеет средний вес. Пятым взвешиванием сравним вес четвёртого пакета либо с самым тяжёлым, либо с самым лёгким из трёх.

[*)] Для ответа на этот вопрос полезно знать двоичную систему счисления или хотя бы иметь представление о том, что на свете есть числа 1, 2, 4, 8, ... Разумеется, число монет в мешке можно считать таким большим, как того потребует решение.

305. Занумеруем наши монеты числами от 1 до 12. Сначала положим на левую чашу весов монеты 1, 2, 3, 4, а на правую — 5, 6, 7 и 8. Рассмотрим два случая:

- **Весы в равновесии.** Значит, фальшивая среди оставшихся (с 9 по 12) монет. Этот случай довольно прост. Сравниваем монеты 9 и 10 с 1 и 2.

  - *Если равновесие,* то фальшивая 11 или 12. За одно взвешивание она находится.
  - *Если равновесия нет,* то ещё проще. Фальшивая — 9 или 10, причём известно даже, легче она или тяжелее настоящей.

- **Левая чаша легче.** Фальшивая среди взвешиваемых. Положим на левую чашу монеты 9, 10, 11 и 4, а на правую — 1, 2, 3 и 8.

  Разберём все три случая:

  - *Левая чаша по-прежнему легче.* Тогда фальшивая одна из двух монет: 4 или 8 (их положение не менялось). Для её обнаружения достаточно одного взвешивания.
  - *Весы уравновесились.* Фальшивая одна из монет 5, 6, 7, причём она тяжелее настоящей. Остальное понятно.
  - *Легче стала правая чаша.* Фальшивая одна из монет 1, 2, 3, и она легче.

- Третий случай (когда при первом взвешивании перевесила левая чаша) по сути ничем не отличается от второго.

306. Эксперт может

1) положить на левую чашку 1-ю монету, на правую — 8-ю. Правая чашка перевесит, суд увидит, что 1-я монета фальшивая, а 8-я — настоящая.
2) положить на правую чашку 2-ю, 3-ю и 8-ю монеты, на левую — 9-ю, 10-ю и 1-ю. Левая чашка перевесит. Суд убедится, что 2-я и 3-я монеты фальшивые, а 9-я и 10-я — настоящие.
3) положить на левую чашку 4-ю, 5-ю, 6-ю, 7-ю, 8-ю, 9-ю и 10-ю монеты, а на правую — остальные. Правая чашка перевесит. Значит, на левой чашке фальшивых монет больше, чем на правой, т. е. 4-я, 5-я, 6-я и 7-я монеты фальшивые, а 11-я, 12-я, 13-я и 14-я — настоящие.

$\triangledown$ Точно так же проверка 2^k-1 фальшивых и 2^k-1 настоящих монет может быть осуществлена за k взвешиваний при любом $k \geqslant 1$.

307. Достаточно проверить два соотношения

$$x_1 + x_2 + x_3 = x_6,$$
$$x_1 + x_6 < x_3 + x_5,$$

каждое из которых необходимо для правильности надписей, где через x_k обозначена масса гирьки с надписью «k граммов».

308. а) Разобьём отрезок на 12 равных частей. Сверху нарисуем дуги, разбивающие его на 3 равные доли, а снизу — на 4. В результате отрезок разделился на кусочки длины 3, 1, 2, 2, 1 и 3.

Следовательно, пирог достаточно разрезать на шесть частей: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$ и $\frac{1}{4}$.

Если же пирог разделён на 5 частей, то при разделе «на троих» кому-то достанется лишь одна часть. Она будет составлять $\frac{1}{3}$ пирога, что не позволит разделить его на четверых.

б) Пусть площадь квартиры равна 12. Ясно, что шесть комнат, площади которых равны 3, 3, 2, 2, 1 и 1, удовлетворяют условиям задачи.

Пяти комнат недостаточно. В самом деле, при расселении трёх семей в пяти комнатах хотя бы одна семья получит только одну комнату, и площадь её должна быть 4. При размещении четырёх семей та, которой достанется эта комната, получит слишком большую площадь.

309. Вначале присутствующих было в 6 раз больше, чем отсутствующих, т. е. отсутствующие составляли $1/7$ часть числа всех учащихся. После выхода одного ученика из класса отсутствующие составили $1/6$ часть от общего числа учащихся.

315. За 10 часов. **320.** 3 часа 45 минут. **324.** В 2,5 раза. Если бы всё время копали все трое, то они выкопали бы $1+3\cdot 0,5 = 2,5$ канавы.

340. Вспомните признак делимости на 9 и заметьте, что 100! делится на 9.

363. Допустим, число 1 не покрашено. Если наименьшее из покрашенных чисел двузначное, то первый из непокрашенных промежутков состоит из нечётного числа цифр, а последний — из чётного числа цифр. Если же наименьшее из покрашенных чисел однозначное, то первый из непокрашенных промежутков состоит не более чем из 8 цифр. Но это слишком мало: не более чем 7 покрашенных цифр вместе с не более чем $8 \cdot 4 = 32$ непокрашенными дают не более чем 39 цифр, а даже самый короткий месяц (февраль) даёт 47 цифр. В обоих случаях получили противоречие. Значит, число 1 должно быть покрашено.

369. 15317. Если отбросить две последние цифры, то оставшиеся цифры в сумме дают 9, а число, из них составленное, делится на 17. Выпишем несколько кратных 17, пока не получим нужную сумму цифр: 17, 34, 51, 68, 85, 102, 119, 136, 153.

371. а) Например, 2 899 999 и 2 900 000.

372. Нет. Например, среди номеров от 000 001 до 001 000 (или от 998 999 до 999 998) нет счастливых.

375. Каждая операция увеличивает на 1 центральное число. Ровно на 1 возрастает и сумма чисел угловых клеток.*) Но $18 \neq 4+5+7+6$.

378. Можно.

381. Не всегда. Если выпилить 1, 5, 6 и 8 зубья, то при любом повороте какие-нибудь две дырки совместятся.

384. 1, 3, 9 и 27.

388. Сначала везде поставьте знак $+$. Получите сумму $1+2+3+ +\ldots+19+20=210$. Затем сообразите, что поставить знак «$-$» перед каким-либо числом a — то же самое, что вычесть *удвоенное* число a. Следовательно, достаточно решить уравнение $210-2x=20$ и затем из имеющихся чисел 2, 3, ... , 19, 20 составить число x.

393. Ответ для n домов: можно построить $2n-1$ заборов. В самом деле, если дом один, то можно построить только один забор, что соответствует формуле $2\cdot 1-1=1$. Дальше применим индукцию. Если для $k=1, 2, \ldots, n-1$ домов формула $2k-1$ уже проверена, то рассмотрим n домов, вокруг которых построено максимально возможное количество заборов. Какой-то один забор огораживает все дома. Если этот внешний забор снести, то самыми внешними станут некоторые два забора. Пусть внутри одного из них будет k домов, а внутри другого — остальные $n-k$ домов. В силу предположения индукции вокруг k домов может быть построено не больше $2k-1$ заборов, а вокруг остальных $n-k$ домов — не больше, $2(n-k)-1$ заборов. Значит, всего заборов не более $(2k-1)+ +(2(n-k)-1)+1=2n-1$, что и требовалось доказать.

396. Обозначим через $f(n)$ наибольшее число частей, на которые n прямых могут разбить плоскость. Порисовав, можно заполнить таблицу

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(n)$	2	4	7	11	16	22	29	37

и обнаружить закономерность $f(n+1)=f(n)+n$. Вам осталось доказать эту закономерность и вывести из неё явную формулу

$$f(n)=\frac{n(n+1)}{2}+1.$$

403. Назовём одну из точек *корнем.* Сопоставим каждой из остальных вершин последний отрезок (единственного по условию) пути, ведущего в эту точку из корня. Это соответствие между $N-1$ вершинами

*) Иными словами, стоящее в угловой клетке число показывает, сколько раз была произведена операция с соответствующим квадратом 2×2.

и отрезками взаимно-однозначное. Чтобы сделать это очевидным, удобно расставить на отрезках стрелки, ведущие от корня: в каждую точку, кроме вершины, ведёт одна стрелка.

Задачу можно решить также по индукции: удаляя любой лист[†] дерева[‡], мы одновременно удаляем одно ребро. (Строго говоря, надо ещё доказать, что деревьев без листьев не бывает. Для этого рассмотрим граф, в котором из каждой вершины исходит не менее 2 рёбер. Из его вершины A_1 пройдём по ребру в A_2. Из A_2 выходит более одного ребра, поэтому можно пройти в вершину $A_3 \neq A_1$, из неё — в A_4, ... Поскольку число вершин графа конечно, рано или поздно образуется цикл.)

405. 63 спички. **409.** Пальцы будут повторяться с периодом 8, поэтому достаточно рассмотреть остаток от деления 2001 на 8. Первым идёт указательный палец.

423. Рассмотрите числа 1, a, a^2, ..., a^m. Поскольку остатков от деления на m всего лишь m, то какие-то два из рассматриваемых чисел дают одинаковые остатки при делении на m. Разность этих чисел делится на m.

426. Произведём сначала разбиение произвольным образом. Если в какой-нибудь палате у парламентария A не меньше двух врагов, то число его врагов в другой палате не больше 1. Поэтому после перемещения A в другую палату суммарное число пар врагов внутри палат уменьшится. Такие перемещения продолжим до тех пор, пока требуемое условие не выполнится.

427. При перекрашивании любой особой точки число отрезков с разноцветными концами уменьшается по крайней мере на 1.

429. При выполнении операций произведение всех написанных на доске чисел остаётся неизменным, а сумма может только увеличиваться.

430. Докажите, что если самая короткая из этих хорд — не диаметр, то она не может проходить через середину никакой другой из этих хорд.

433. $2 \cdot 5 = 10$.

434. Белую ладью можно поставить на любую из 64 клеток. Независимо от своего расположения она бьёт 15 полей (включая поле, на котором она стоит). Поэтому остаётся 49 полей, на которые можно поставить чёрную ладью. Таким образом, всего есть $64 \cdot 49 = 3136$ разных способов.

435. Белого короля можно поставить на любое из 64 полей. Однако количество полей, которые он при этом будет бить, зависит от его расположения. Поэтому разберём три случая:

[†]Лист — это вершина, из которой исходит единственное ребро.

[‡]Дерево — это связный граф без циклов, то есть граф, в котором от любой вершины можно дойти, двигаясь по рёбрам, до любой другой вершины, причём единственным способом, если ни разу не возвращаться назад.

- если белый король стоит в углу (углов всего 4), то он бьёт 4 поля (включая то, на котором стоит) и остаётся 60 полей, на которые можно поставить чёрного короля;
- если белый король стоит на краю доски, но не в углу (таких полей — 24), то он бьёт 6 полей, и для чёрного короля остаётся 58 возможных полей;
- если же белый король стоит не на краю доски (таких полей — 36), то он бьёт 9 полей, и для чёрного короля остаётся 55 возможных полей.

Таким образом, всего есть $4 \cdot 60 + 24 \cdot 58 + 36 \cdot 55 = 3612$ способов.

441. Перейдём к дополнительным событиям: свет был включен 20% времени, музыка молчала 10%, а дождь не шёл 50% времени, так что дополнительные события не могли занять более $20 + 10 + 50 = 80\,\%$ времени. Следовательно, музыка под дождём в темноте звучала не меньше $100 - 80 = 20\,\%$ времени.

443. Добавьте к тем и другим числа, кратные и 8, и 9. Останется сравнить количество чисел, кратных 8 $\left(\left[\frac{1993}{8}\right] = 249\right)$, с количеством чисел, кратных 9 $\left(\left[\frac{1993}{9}\right] = 221\right)$.

445. Количество шестизначных чисел, в записи которых встречаются только нечётные цифры, равно $5^6 = 15\,625$. Всего шестизначных чисел 900 000. Поэтому количество шестизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна чётная цифра, равно $900\,000 - 15\,625 = 884\,375$.

449. 10. Выпишем все цифры в порядке убывания: 9876543210. Чтобы получить девятизначное число, нужно убрать одну цифру. Это можно сделать 10 способами.

453. 50%.

454. Достаточно извлечь шар из урны $\boxed{\text{БЧ}}$. Если он белый, то в ней белые шары, а чёрные шары — в урне $\boxed{\text{ББ}}$. Если он чёрный, то в урне $\boxed{\text{БЧ}}$ чёрные, а в урне $\boxed{\text{ЧЧ}}$ белые шары.

456. Могут. Например, 9-я метка одного и 13-я другого находятся друг от друга на расстоянии 1 см, ибо $13 \cdot 25 - 9 \cdot 36 = 1$.

457. Полминуты поезд движется мимо столба, значит, полминуты поезд «съезжает» с моста, т. е. с момента, когда поезд начал въезжать на мост до момента, когда он начал съезжать с него, прошло полминуты. Итак, за 1/2 минуты поезд прошёл 450 м, откуда скорость равна $450 : (1/2) = 900$ м/мин $= 54$ км/ч. Умножая скорость на 1/2 минуты, находим длину поезда. *Ответ:* 54 км/ч; 500 м.

460. Олимпиада Карповна выпила 11 чашек, Сосипатра Титовна — 9, Поликсена Уваровна — 7.

482. $203 = 7 \cdot 29 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1$ (всего $203 - 7 - 29 = 167$ единиц).

487. Посмотрите на рисунок.

1			20			13	
	2		21		12		
		3	22	11			
14	15	16	4	17	18	19	27
		10	23	5			
	9		24		6		
8			25			7	
			26				28

492. Рассмотрите отрезки длин 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 и 512 (или 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 и 55).

493. Рассмотрите последовательность

$a, b, c,\ a, b, c,\ a, b, c,\ a, b, c,\ a, b, c,\ a, b, c,\ a, b$

и запишите неравенства $a+b+c>0$, $7a+7b+6c<0$. Пример: $a+b=-7$, $c=8$.

495. 49, ибо каждый бой уменьшает количество участников на 1.

495′. В начале был один кусок, в конце стало $5\cdot 8=40$. Каждый разлом увеличивает количество кусков на 1. *Ответ:* $40-1=39$.

496. Если разбойники делили x рублей, то первому досталось $100+\frac{x-100}{10}$, а второму

$$200+\frac{x-200-(100+\frac{x-100}{10})}{10}.$$

Приравняв эти доли, найдём $x=8100$, откуда $100+(x-100)/10=900$.

Другой способ менее стандартен, но быстрее приводит к цели и очень красив. (Не зря эту задачу приписывают Леонарду Эйлеру!) Начнём с конца: n-й разбойник получил $100n$ рублей. Предпоследний получил $100(n-1)$ и десятую часть остатка, так что «остаток» — 1000 рублей. Значит, последний получил 900 рублей, $n=9$.

498. Разбив квадрат на n^2 квадратиков, видим, что в него можно вписать n^2 не налегающих друг на друга кругов радиуса $\frac{1}{2n}$. Неравенство $n^2\cdot\frac{1}{2n}=\frac{n}{2}>1101$ выполнено, например, при $n>2202$.

500. По озеру быстрее. Пусть скорость парохода равна v, скорость течения u. Если $v\leqslant u$, пароход вообще не выплывет против течения; если же $v>u>0$, то всё дело в неравенстве

$$\frac{s}{u+v}+\frac{s}{v-u}>\frac{2s}{v}.$$

501. 35 суток. Обозначим буквой s расстояние между Нижним Новгородом и Астраханью, а буквами v и u — скорость течения реки и собственную скорость парохода (то есть скорость, с какой двигался бы он в озере). Тогда

$$\begin{cases} s=5(v+u),\\ s=7(v-u).\end{cases}$$

Умножив первое уравнение на 7, а второе на 5 и вычтя из первого второе, получим

$$7s - 5s = 35(v+u) - 35(v-u),$$

откуда $2s = 70u$, то есть $s = 35u$.

502. Если 7 щук насытятся (съев каждая по 3 голодные щуки), то останутся ещё 2 голодные, которые смогут насытиться (съев каждая по 3 щуки, которые только что насытились). Таким образом $7+2=9$ щук могут насытиться. Если же предположить, что насытились 10 щук, то всего окажется съедено не менее 30 щук, что невозможно.

506. Если бы камни увезли, то на какую-то трёхтонку положили бы 8 камней. Но даже 8 самых лёгких камней весят больше 3 тонн.

506. 5 трёхтонок. Покажем сначала, что 4 трёхтонок может не хватить. Возьмём 13 одинаковых ящиков весом по $10/13$ тонны. Тогда в одну трёхтонку мы не сможем поместить больше трёх ящиков, а в четыре — больше 12 ящиков.

Докажем теперь, что 5 трёхтонок всегда хватает. Действительно, в каждую трёхтонку мы можем погрузить не меньше двух тонн груза (если погружено меньше двух тонн, можно добавить ещё ящик). Тогда в 5 трёхтонок можно погрузить не меньше 10 тонн.

508. Две остальные суммы равны 12 и 16, а сами числа равны либо (-1), 2, 6 и 10, либо $(-3/2)$, $5/2$, $13/2$ и $19/2$.

509. Рассмотрите стоящего в одной шеренге с самым низким из высоких и в одном ряду с самым высоким из низких.

511′. В этой игре может выиграть первый, независимо от размеров стола! Ведь он может первым ходом положить пятак так, чтобы центры пятака и стола совпали. После этого на каждый ход второго игрока он может отвечать симметрично относительно центра стола. При такой стратегии после каждого хода первого игрока позиция становится симметричной, а второй всё время нарушает эту симметрию. Поэтому если возможен очередной ход второго игрока, то возможен и симметричный ему ответный ход первого.

514. 2100010006.

515.

Цифра	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
встречается	1	7	3	2	1	1	1	2	1	1	раз.

или

Цифра	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
встречается	1	11	2	1	1	1	1	1	1	1	раз.

Содержание

*) Эти две главки написаны на основе статей С.Л. Табачникова в журнале «Квант» (номер 6 за 1989 год и номер 6 за 1990 год).